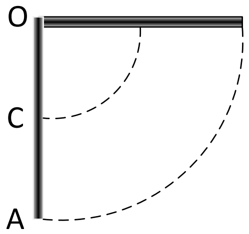
6. Rotasjon. Løsning på blandede oppgaver.

Oppgave 6.1:



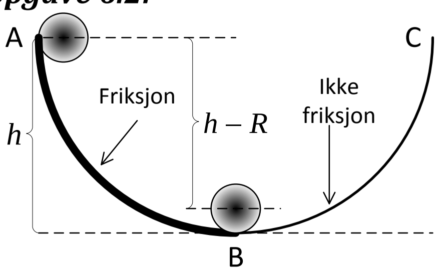
Stanga har lengde $L = 1.35\,\text{m}$. Når stanga dreies fra horisontal til vertikal stilling, synker massesenteret en høyde $h = \frac{1}{2}L$. Treghets-momentet til stanta om ytterpunktet A er $I_A = \frac{1}{3}mL^2$. Siden stanga var i ro i starten, gir energibevaring at

$$\tfrac{1}{2}I_A\omega^2 = mg\cdot\tfrac{1}{2}L \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{3}mL^2\omega^2 = mgL \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}}\,.$$

Punktet A på stanga har da farten

$$v = L\cdot\omega = L\cdot\sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{3gL} = \sqrt{3\cdot\left(9.81\,\text{m/s}^2\right)\cdot 1.35\,\text{m}} = \underline{\underline{6.30\,\text{m/s}}}\,.$$

Oppgave 6.2:



a) Bruker et energiresonnement, og legger nullnivå i det laveste punktet til kulas massesenter, d.v.s. i en høyde R over rennas bunn B. Da har kulas massesenter falt en strekning $h - R$. Vet at kulas treghetsmoment om massesenteret er $I_{CM} = \frac{2}{5}mR^2$. Siden kula ruller uten å gli, er massesenterets fart $v_{CM} = \omega R$. Da blir:

$$\tfrac{1}{2}mv_{CM}^2 + \tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = mg\left(h - R\right)$$

$$\tfrac{1}{2}mv_{CM}^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 = mg\left(h - R\right)$$

$$\tfrac{1}{2}v_{CM}^2 + \tfrac{1}{5}v_{CM}^2 = g\left(h - R\right) \quad\Leftrightarrow\quad v_{CM} = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{10}{7}g\left(h - R\right)}}}$$

b) Siden det ikke er friksjon på strekningen B-C, vil kula fortsette å rotere med samme vinkelfart hele tiden opp fra B mot C. Denne vinkelfarten er

$$\omega = \frac{v_{CM}}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\tfrac{10}{7}g\left(h - R\right)}\,.$$

Når kula er i sitt høyeste punkt med høyde h_1 over B er kulas fart lik null. Men kula roterer fortsatt. Da kan vi sette opp energilikningen nedenfor, der vi setter at energien i høyden h_1 over B er lik energien i A:

$$mg\left(h_1 - R\right) + \tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = mg\left(h - R\right)$$

$$mg\left(h_1 - R\right) = mg\left(h - R\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{1}{R}\sqrt{\tfrac{10}{7}g\left(h - R\right)}\right)^2$$

$$= mg\left(h - R\right) - \tfrac{1}{5}m\left(\tfrac{10}{7}g\left(h - R\right)\right) = \tfrac{5}{7}mg\left(h - R\right)$$

$$h_1 - R = \tfrac{5}{7}\left(h - R\right) \quad\Leftrightarrow\quad h_1 = \tfrac{5}{7}h - \tfrac{5}{7}R + R = \underline{\underline{\tfrac{5}{7}h + \tfrac{2}{7}R}}\,.$$

Oppgave 6.3:

a) På toppen av skråplanet har sylinderen kun potensiell energi. Vi legger nullnivå for potensiell energi ved skråplanets nedre kant. Der har sylinderen kun kinetisk energi. Energiloven gir da

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

$$mv^2 + \left(k \cdot mR^2\right)\omega^2 = 2mgh$$

$$v^2 + k \cdot (R\omega)^2 = 2gh$$

Her er v massesenterets fart, mens ω er vinkelfarten om rotasjonsaksen. Siden sylinderen ruller uten å gli er

$$v = \omega R,$$

slik at energilikningen blir

$$v^2 + k \cdot v^2 = 2gh \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{v^2(1+k) = 2gh}}.$$

b) Av bevegelseslikningene får vi:

$$v = v_0 + at$$

$$l = l_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

Benytter at $v_0 = 0\,\text{m/s}$, og legger koordinatsystemet med retning ned skråplanet slik at $l_0 = 0\,\text{m}$. Da reduseres likningene over til

$$v = at$$

$$l = \tfrac{1}{2}at^2$$

Deler likningene på hverandre, og får

$$\frac{v}{l} = \frac{at}{\tfrac{1}{2}at^2} = \frac{2}{t} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{2l}{t} = \frac{2 \cdot 1.00\,\text{m}}{1.20\,\text{s}} = \underline{1.67\,\text{m/s}}.$$

Setter dette inn i formelen fra a):

$$v^2(1+k) = 2gh \quad \Leftrightarrow \quad 1+k = \frac{2gh}{v^2} = \frac{2 \cdot (9.81\,\text{m/s}) \cdot (0.20\,\text{m})}{(1.67\,\text{m/s})^2} = \underline{1.41}$$

$$k = 1.41 - 1 = \underline{\underline{0.41}}$$

Oppgave 6.4:

a) Når legemet har fart v, ruller sylinderen med vinkelfart $\omega = \dfrac{v}{R}$. Da er legemets samlede kinetiske energi

$$W_{\text{kin}} = \underbrace{\tfrac{1}{2}mv^2}_{\substack{\text{klossens}\\ \text{kinetiske}\\ \text{energi}}} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I_C\omega^2\right)}_{\substack{\text{sylinderens translasjons-}\\ \text{og rotasjons-energi}}} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = mv^2 + \tfrac{1}{4}mv^2$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{5}{4}mv^2}}$$

b) På toppen av skråplanet har legemet potensiell energi

$$W_{\text{pot}} = (2m)gh = 2mgl\sin\theta.$$

1) Dersom det ikke er friksjon mellom kloss og skråplan, får vi energilikningen

$$2mgl\sin\theta = \tfrac{5}{4}mv^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{8}{5}gl\sin\theta}}}.$$

2) Når det er friksjon mellom kloss og skråplan, er friksjonskraften mellom kloss og skråplan

$$F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\theta .$$

Energilikningen blir nå

$$2mgl\sin\theta - F_f \cdot l = \tfrac{5}{4}mv^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2mgl\sin\theta - \mu mg\cos\theta \cdot l = \tfrac{5}{4}mv^2$$

$$\Leftrightarrow \quad v^2 = \tfrac{8}{5}gl\sin\theta - \tfrac{4}{5}\mu gl\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{v = \sqrt{\tfrac{4}{5}gl\left(2\sin\theta - \mu\cos\theta\right)}}}$$

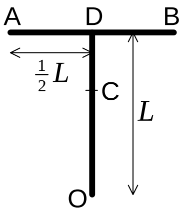
c) Dersom legemet gis en startfart v_0, skal det ha samme fart etter å ha beveget seg en strekning *l*. Da er

$$\tfrac{5}{4}mv_0^{\,2} + 2mgl\sin\theta - F_f \cdot l = \tfrac{5}{4}mv_0^{\,2} \quad \Leftrightarrow \quad 2mgl\sin\theta - \mu mg\cos\theta \cdot l = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu\cos\theta = 2\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\mu = 2\tan\theta}}$$

Oppgave 6.5:

a)



Legger en *y*-akse fra O til D, med origo i O. På grunn av symmetrien må massesenteret ligge på denne aksen. Siden staven OD har sitt massesenter i avstand $\tfrac{1}{2}L$ fra O, og staven AB har sitt massesenter i avstand *L* fra O, får legemets massesenter C en avstand fra O gitt ved

$$y_C = \frac{1}{m_{OD} + m_{AB}}\left(\tfrac{1}{2}L \cdot m_{OD} + L \cdot m_{AB}\right) = \frac{1}{m + 2m}\left(\tfrac{1}{2}L \cdot m + L \cdot 2m\right) = \frac{1}{3m} \cdot \tfrac{5}{2}mL = \underline{\underline{\tfrac{5}{6}L}} .$$

b) Treghetsmomentet til staven OD om O er

$$I_{OD,O} = \tfrac{1}{3}m_{OD}L^2 = \underline{\tfrac{1}{3}mL^2} ,$$

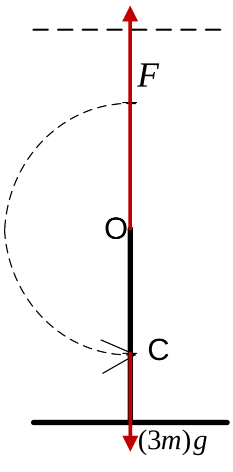
mens treghetsmomentet til staven AB om O må finnes ved hjelp av Steiners setning:

$$I_{AB,O} = \tfrac{1}{12}m_{AB} \cdot L^2 + m_{AB} \cdot L^2 = \tfrac{13}{12} \cdot 2m \cdot L^2 = \underline{\tfrac{13}{6}mL^2} .$$

Treghetsmomentet om O til hele legemet blir da

$$I_O = \tfrac{1}{3}mL^2 + \tfrac{13}{6}mL^2 + = \underline{\underline{\tfrac{5}{2}mL^2}} .$$

c)



Siden massesenteret er i en avstand $\tfrac{5}{6}L$ fra O, har det falt en strekning

$$h = 2 \cdot \tfrac{5}{6}L = \tfrac{5}{3}L .$$

Energibetraktning:

$$(3m)gh = \tfrac{1}{2}I_O\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = \frac{6mg \cdot \tfrac{5}{3}L}{\tfrac{5}{2}mL^2} = 4\frac{g}{L} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\omega = 2\sqrt{\frac{g}{L}}}} .$$

Legemet kan nå betraktes som en partikkel som roterer om O med denne vinkelfarten. Da har det en sentripetalakselerasjon

$$a = \frac{v_C^{\,2}}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2 \cdot \tfrac{5}{6}L = 4\frac{g}{L} \cdot \tfrac{5}{6}L = \underline{\tfrac{10}{3}g}$$

fordi massesenteret følger en sirkelbane med radius $R = \tfrac{5}{6}L$. Da gir Newtons 2. lov:

$$F - (3m) \cdot g = (3m) \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad F = 3mg + 3m \cdot \tfrac{10}{3}g = \underline{\underline{13mg}} .$$

Oppgave 6.6:

a) Trommelens treghetsmoment om symmetriaksen er summen av sylinderens og skivenes treghetsmomenter:

$$I_A = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}m\cdot R^2 + 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{8}m\cdot(3R)^2 = \tfrac{3}{8}mR^2 + \tfrac{9}{8}mR^2 = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}mR^2}}.$$

b) Trommelens kinetiske energi er summen av translasjons- og rotasjonsenergi:

$$W_{kin} = \tfrac{1}{2}mv_A{}^2 + \tfrac{1}{2}I_A\omega^2.$$

Benytter videre at $v_A = \omega\cdot 3R \quad\Leftrightarrow\quad \omega = \dfrac{v_A}{3R}$, og får

$$W_{kin} = \tfrac{1}{2}mv_A{}^2 + \tfrac{1}{2}I_A\omega^2 = \tfrac{1}{2}mv_A{}^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}mR^2\cdot\left(\frac{v_A}{3R}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv_A{}^2 + \tfrac{1}{12}mR^2 = \underline{\underline{\tfrac{7}{12}mR^2}}.$$

Alternativ: Kan også betrakte bevegelsen som en ren rotasjon om sylinderens berørings-punkt P med underlaget. Da er

$$I_P = I_A + m\cdot(3R)^2 = \tfrac{3}{2}mR^2 + 9mR^2 = \underline{\tfrac{21}{2}mR^2}.$$

Den kinetiske energien blir da

$$W_{kin} = \tfrac{1}{2}I_P\omega^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{21}{2}mR^2\cdot\left(\frac{v_A}{3R}\right)^2 = \underline{\underline{\tfrac{7}{12}mv_A{}^2}}.$$

c) Klossen har samme fart som et punkt på snora. Men et slikt punkt vil ha en fart som er lik symmetriaksens fart pluss et bidrag som skyldes rotasjonen rundt symmetriaksen:

$$v_K = v_A + \omega R = v_A + \frac{v_A}{3R}\cdot R = v_A + \tfrac{1}{3}v_A = \underline{\underline{\tfrac{4}{3}v_A}}.$$

Også her kan vi betrakte det som en ren rotasjon om trommelens berøringspunkt P med underlaget. Da kan vi sette opp:

$$\omega = \frac{v_A}{3R} = \frac{v_K}{(3R+R)} \quad\Leftrightarrow\quad v_K = \underline{\underline{\tfrac{4}{3}v_A}}.$$

Når systemet starter i ro, er det kun klossens potensielle energi i tyngdefeltet som inngår i energiregnskapet. Når klossen har falt en høyde *h*, har både trommelen og klossen fått kinetisk energi. Med nullnivå en høyde *h* under startpunktet får vi da:

$$m_K gh = \tfrac{7}{12}mv_A{}^2 + \tfrac{1}{2}m_K v_K{}^2$$

$$\tfrac{3}{4}m\cdot g\cdot h = \tfrac{7}{12}mv_A{}^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}m\cdot\left(\tfrac{4}{3}v_A\right)^2$$

$$\tfrac{3}{4}gh = \tfrac{7}{12}v_A{}^2 + \tfrac{2}{3}v_A{}^2 = \tfrac{5}{4}v_A{}^2$$

$$v_A = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{3}{5}gh}}}$$

Oppgave 6.7:

a) Betrakter kule og sylinder som ett system. De eneste ytre kreftene som virker, er tyngden til sylinderen og kraften fra akslingen mot sylinderen. (Kulas tyngde kan neglisjeres). Når vi legger momentpunkt på sylinderaksen, vil ikke disse kreftene gi noe kraftmoment. Dermed er systemets spinn bevart.

Før støtet har ikke sylinderen noe spinn. Kulas spinn om sylinderaksen før støtet er

$$L_{K,1} = m_K\cdot u\cdot r.$$

Sylinderens spinn etter støtet er

$$L_{\text{syl}} = I_{\text{CM}}\omega = \tfrac{1}{2} m_{\text{S}} R^2 \omega ,$$

mens kulas spinn da er

$$L_{\text{K,2}} = m_{\text{K}} \cdot v \cdot r \;.$$

Da blir

$$m_{\text{K}} \cdot u \cdot r = m_{\text{K}} \cdot v \cdot r + I_{\text{CM}}\omega \,.$$

$$\omega = \frac{1}{I_{\text{CM}}} m_{\text{K}} \cdot r\left(u - v\right) = \frac{1}{\tfrac{1}{2} m_{\text{S}} R^2} m_{\text{K}} \cdot r\left(v_1 - v_2\right)$$

$$= \frac{0.015\,\text{kg} \cdot 0.15\,\text{m} \cdot \left(350\,\text{m/s} - 270\,\text{m/s}\right)}{\tfrac{1}{2} \cdot 3.00\,\text{kg} \cdot \left(0.20\ \text{m}\right)^2} = \underline{\underline{3.00\,\text{rad/s}}}$$

b) Kinetisk energi før kollisjonen:

$$W_1 = \tfrac{1}{2} m v_1^{\,2} = \tfrac{1}{2} \cdot 0.015\,\text{kg} \cdot \left(350\,\text{m/s}\right)^2 = \underline{919\,\text{J}} \;.$$

Kinetisk energi etter kollisjonen:

$$W_2 = \tfrac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_2^{\,2} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} M R^2\right)\omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_2^{\,2}$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot 3.00\,\text{kg} \cdot \left(0.20\,\text{m}\right)^2 \cdot \left(3.00\,\text{s}^{-1}\right)^2 + \tfrac{1}{2} \cdot 0.015\,\text{kg} \cdot \left(270\,\text{m/s}\right)^2 = \underline{547\,\text{J}}$$

Vi ser at noe kinetisk energi er gått over til andre energiformer (varme) etter kollisjonen. (Den potensielle energien er den samme før og etter kollisjonen).

Oppgave 6.8:

a) Hver av de tre ”armene” har treghetsmoment

$$I = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{3} m\right) \cdot l^2 = \tfrac{1}{9} m l^2$$

om A. Samlet treghetsmoment for de tre armene om A er da

$$I_{\text{A}} = 3I = 3 \cdot \tfrac{1}{9} m l^2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} m l^2}} \;.$$

b) Når den lille partikkelen blir sittende fast i legemet som roterer med vinkelfart ω om A, får partikkelen en fart $v = \omega l$ like etter støtet. Under støtet er spinnet bevart. Da blir

$$\left(\tfrac{1}{3} m\right) \cdot v_0 \cdot l + 0 = \left(\tfrac{1}{3} m\right) \cdot (\omega l) \cdot l + I \cdot \omega$$

$$\cancel{\left(\tfrac{1}{3} m\right)} \cdot v_0 \cdot \cancel{l} = \cancel{\left(\tfrac{1}{3} m\right)} \cdot \omega l^{\cancel{2}} + \cancel{\tfrac{1}{3} m}\, l^{\cancel{2}} \cdot \omega$$

$$v_0 = \omega l + \omega l = 2\omega l \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \underline{\underline{\frac{v_0}{2l}}}$$

Oppgave 6.9:

a) 1) Ved beregning av massesenterets posisjon kan vi betrakte staven som ett massepunkt i avstand $\tfrac{1}{2} l = 0.40\,\text{m}$ fra A. Legger en x-akse langs staven med origo i A:

$$x_{\text{C}} = \frac{m_{\text{s}} \cdot \tfrac{1}{2} l + m_{\text{k}} \cdot l}{m_{\text{s}} + m_{\text{k}}} = \frac{(0.30\,\text{kg}) \cdot (0.40\,\text{m}) + (0.10\,\text{kg}) \cdot (0.80\,\text{m})}{0.30\,\text{kg} + 0.10\,\text{kg}} = \underline{\underline{0.50\,\text{m}}} \;.$$

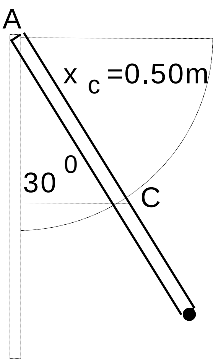
2) Vet at tavens treghetsmoment om A er $\tfrac{1}{3} m_{\text{s}} l^2$. Legger til kulas treghetsmoment om A, slik at det sammensatte legemets treghetsmoment om A blir

$$I_A = \tfrac{1}{3}m_s l^2 + m_k \cdot l^2 = \left(\tfrac{1}{3}\cdot 0.30\,\text{kg} + 0.10\,\text{kg}\right)\cdot(0.80\,\text{m})^2 = \underline{\underline{0.128\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}}\,.$$

b) Benytter at spinnet om A er bevart. Før kula treffer staven, har kun kula spinn. Etter at kula ble sittende fast i staven, har det sammensatte legemet spinn. Da blir:

$$I_A\omega = m_k \cdot u \cdot l \quad\Leftrightarrow\quad \omega = \frac{m_k\cdot u\cdot l}{I_A} = \frac{(0.10\,\text{kg})\cdot(5.0\,\text{m/s})\cdot(0.80\,\text{m})}{0.128\,\text{kg}\cdot\text{m}^2} = \underline{\underline{3.13\,\text{s}^{-1}}}\,.$$

c)



Legemets massesenter C heves en høyde

$$h = x_C - x_C\cos 30^\circ = 0.50\,\text{m}\left(1-\cos 30^\circ\right) = \underline{0.067\,\text{m}}\,.$$

Vi får da energilikningen

$$\tfrac{1}{2}I_A\omega^2 = (m_s + m_k)gh$$

der ω er vinkelfarten når legemet er vertikalt.
Løses denne likningen, får vi

$$\omega = \sqrt{\frac{2(m_s+m_k)gh}{I_A}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot(0.40\,\text{kg})\cdot(9.81\,\text{m/s}^2)\cdot(0.067\,\text{m})}{0.128\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}} = \underline{\underline{2.0\,\text{s}^{-1}}}$$

Under selve støtet er spinnet om A bevart. Fra b) får vi

$$I_A\omega = m_k\cdot u\cdot l \quad\Leftrightarrow\quad u = \frac{I_A\omega}{m_k l} = \frac{(0.128\,\text{kg}\cdot\text{m}^2)\cdot(2.0\,\text{s}^{-1})}{(0.10\,\text{kg})\cdot(0.80\,\text{m})} = \underline{\underline{3.2\,\text{m/s}}}.$$

d) 1) Like etter støtet har kula ingen fart i vertikal retning, fordi det ikke virker støtkrefter vertikalt. Bevaring av spinn om A gir:

$$m_k\cdot u\cdot l = m_k\cdot v\cdot l + \tfrac{1}{3}m_s l^2\omega \quad\Leftrightarrow\quad m_k(u-v) = \tfrac{1}{3}m_s\omega l \qquad (1)$$

Bevaring av kinetisk energi gir:

$$\tfrac{1}{2}m_k u^2 = \tfrac{1}{2}m_k v^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3}m_s l^2\right)\omega^2 \quad\Leftrightarrow\quad m_k(u^2-v^2) = \tfrac{1}{3}m_s\omega^2 l^2 \qquad (2)$$

2) Deler (2) på (1), benytter at $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$, og ser bort fra muligheten $u = v$ som innebærer at kula ikke treffer:

$$\frac{m_k(u+v)(u-v)}{m_k(u-v)} = \frac{\tfrac{1}{3}m_s\omega^2 l^2}{\tfrac{1}{3}m_s\omega l} \quad\Leftrightarrow\quad u+v = \omega l \quad\Leftrightarrow\quad v = \omega l - u\,.$$

Settes dette inn i (1), får vi

$$m_k\left(u - (\omega l - u)\right) = \tfrac{1}{3}m_s\omega l \quad\Leftrightarrow\quad m_k(2u - \omega l) = \tfrac{1}{3}m_s\omega l$$

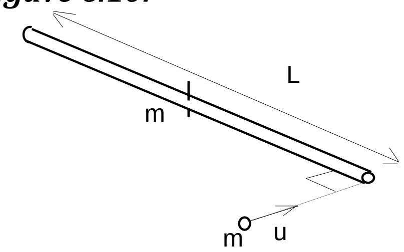
$$\omega = \frac{2m_k u}{\left(\tfrac{1}{3}m_s + m_k\right)l} = \frac{2\cdot(0.10\,\text{kg})\cdot(0.50\,\text{m/s})}{(0.20\,\text{kg})\cdot(0.80\,\text{m})} = \underline{\underline{6.25\,\text{s}^{-1}}}\,.$$

$$v = \omega l - u = (6.25\,\text{s}^{-1})\cdot(0.80\,\text{m}) - 5.0\,\text{m/s} = \underline{\underline{0.0\,\text{m/s}}}\,.$$

(Kula vil altså falle rett ned). $\alpha_A = 2\alpha_B$

Oppgave 6.10:

a)



Stavens treghetsmoment om aksen er $I = \frac{1}{12}mL^2$.

Bevaring av spinn om stavens rotasjonsakse:

$$m \cdot u \cdot \left(\tfrac{1}{2}L\right) = m \cdot v \cdot \left(\tfrac{1}{2}L\right) + I\omega$$

$$= \tfrac{1}{2}mvL + \tfrac{1}{12}mL^2\omega$$

$$u = v + \tfrac{1}{6}\omega L \quad \Leftrightarrow \quad \omega L = 6(u - v).$$

Bevaring av kinetisk energi:

$$\tfrac{1}{2}mu^2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{12}mL^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = \tfrac{1}{12}L^2\omega^2 + v^2.$$

Setter inn at $\omega L = 6(u - v)$:

$$u^2 = \tfrac{1}{12}(6(u-v))^2 + v^2 = 3(u^2 - 2uv + v^2) + v^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4v^2 - 6uv + 2u^2 = 0.$$

$$4v^2 - 6uv + 2u^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{6u \pm \sqrt{36u^2 - 32u^2}}{8} = \frac{6u \pm 2u}{8} = \begin{cases} u \\ \underline{\tfrac{1}{2}u} \end{cases}$$

Løsningen $v = u$ betyr at partikkelen bommer. Da er også $\omega = 0$, som ikke er interessant. Brukbar løsning er $v = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}u}}$ som gir

$$\omega = \tfrac{6}{L}(u - v) = \tfrac{6}{L}\left(u - \tfrac{1}{2}u\right) = \underline{\underline{\tfrac{3u}{L}}}.$$

b) Når partikkelen blir liggende i ro etter støtet, får vi disse bevaringslikningene:

Spinn:

$$m \cdot u \cdot x = I\omega = \tfrac{1}{12}mL^2\omega \quad \Leftrightarrow \quad u \cdot x = \tfrac{1}{12}L^2\omega.$$

Kinetisk energi:

$$\tfrac{1}{2}mu^2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{12}mL^2\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = \tfrac{1}{12}L^2\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad u = \sqrt{\tfrac{1}{12}}L\omega.$$

Setter dette inn i likningen for spinnbevaring:

$$\left(\sqrt{\tfrac{1}{12}}L\omega\right)x = \tfrac{1}{12}L^2\omega \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\tfrac{1}{12}L^2\omega}{\sqrt{\tfrac{1}{12}}L\omega} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{12}}L}}.$$

Oppgave 6.11:

a) Ringens treghetsmoment om sentrum er

$$I_R = \left(\tfrac{1}{7}m\right)R^2 = \tfrac{1}{7}mR^2.$$

Hver stav har treghetsmoment

$$I_S = \tfrac{1}{12}\cdot\left(\tfrac{3}{7}m\right)\cdot(2R)^2 = \tfrac{1}{7}mR^2 \text{ om sitt midtpunkt.}$$

Hele legemets treghetsmoment om midtpunktet blir da

$$I = I_R + 2I_S = \tfrac{1}{7}mR^2 + 2\cdot\tfrac{1}{7}mR^2 = \underline{\underline{\tfrac{3}{7}mR^2}}.$$

b) Høydeforskjellen mellom topp og bunn for skråplanet er

$$h = L\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}L.$$

Legger nullnivå for potensiell energi i skråplanets nedre ende, og benytter at den potensielle energien i startpunktet går over til translatorisk kinetisk energi pluss rotasjonsenergi:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}mgL$$

Her er v massesenterets fart, mens $\omega = \dfrac{v}{R}$ er vinkelfarten så lenge legemet ruller uten å gli. Innsetting av uttrykket for treghetsmoment gir

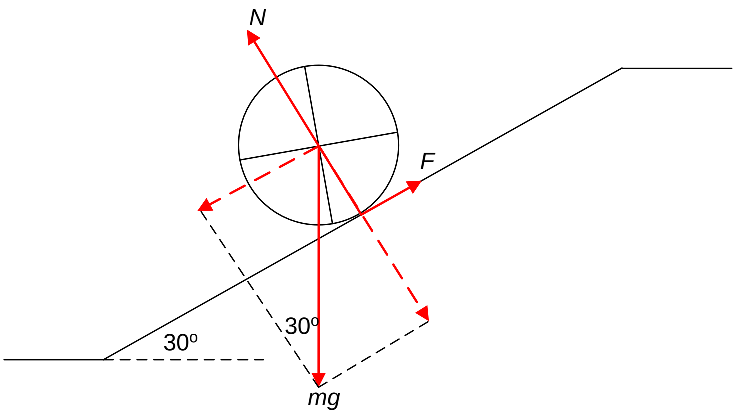
$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{7}mR^2\cdot\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mgL$$

$$v^2 + \tfrac{3}{7}v^2 = gL \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{10}{7}v^2 = gL \quad\Leftrightarrow\quad v = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{7}{10}gL}}}\,.$$

c) Benytter enklest at

$$v^2 - 0^2 = 2\cdot a\cdot L \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{7}{10}gL = 2aL \quad\Leftrightarrow\quad a = \underline{\underline{\tfrac{7}{20}g}}\,.$$

d)



De kreftene som virker i akselerasjonsretningen, er tyngdekomponenten $mg\sin 30^\circ$ og friksjonskraften F_f. Newtons 2. lov langs skråplanet gir

$$mg\sin 30^\circ - F_f = m\cdot a \quad\Leftrightarrow\quad mg\cdot\tfrac{1}{2} - F = m\cdot\tfrac{7}{20}g \quad\Leftrightarrow\quad F = \tfrac{1}{2}mg - \tfrac{7}{20}mg = \underline{\underline{\tfrac{3}{20}mg}}\,.$$

Vi ser av figuren at normalkraften er

$$N = mg\cos 30^\circ = mg\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

For å få rulling uten å gli, må vi kreve at maksimalt tilgjengelig friksjonskraft er minst like stor som den aktuelle friksjonskraften:

$$\mu N \ge F_f \quad\Leftrightarrow\quad \mu \ge \frac{F_f}{N} = \frac{\tfrac{3}{20}mg}{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}mg} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{10}}}\,.$$

e) Bruker figuren ovenfor. Kraftmomentsetningen om legemets midtpunkt (massesenter) blir

$$F_f\cdot R = I\cdot\alpha \quad\Leftrightarrow\quad F_f\cdot R = \tfrac{3}{7}mR^2\cdot\frac{a}{R} \quad\Leftrightarrow\quad F_f = \tfrac{3}{7}m\cdot a\,.$$

Setter dette inn i Newtons 2. lov:

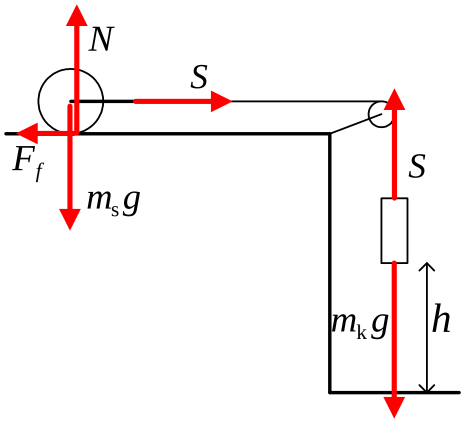
$$mg\cdot\sin 30^\circ - F_f = m\cdot a \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}mg - \tfrac{3}{7}ma = ma \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}g = \tfrac{10}{7}a \quad\Leftrightarrow\quad a = \underline{\underline{\tfrac{7}{20}g}}\,.$$

Da blir

$$F = \tfrac{3}{7}ma = \tfrac{3}{7}m\cdot\tfrac{7}{20}g = \underline{\underline{\tfrac{3}{20}mg}}\,.$$

Oppgave 6.12:

a)



Starter med å tegne inn de kreftene som virker. Siden trinsa er masseløs, og det ikke er friksjon i trinsa, er snordraget S like stort i begge ender av snora. Da blir Newtons 2. lov for klossen:

$$mg - S = ma. \qquad (1)$$

Legger momentpunkt i sylinderens berøringspunkt med underlaget. Da vil verken normalkraften N, sylinderens tyngde $m_S g$ eller friksjonskraften F_f gi noe kraftmoment, slik at kraftmomentsetningen blir:

$$S \cdot R = I_A \alpha \qquad (2)$$

der I_A er sylinderens treghetsmoment om berøringspunktet A med bordet.

Vi bruker Steiners setning, og får at

$$I_A = \tfrac{1}{2}(2m)R^2 + (2m) \cdot R^2 = 3mR^2.$$

Videre er

$$a = \alpha R \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{a}{R}.$$

Settes alt dette inn i (2), får vi

$$S \cdot R = 3mR^2 \cdot \left(\frac{a}{R}\right) \quad \Leftrightarrow \quad S = 3ma.$$

Så settes dette inn i (1), og vi får

$$mg - 3ma = ma \quad \Leftrightarrow \quad a = \underline{\underline{\tfrac{1}{4}g}}.$$

b) Her er akselerasjonen konstant, og startfarten $v_0 = 0\,\text{m/s}$. Benytter enklest at

$$v^2 - v_0^2 = 2ah \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2 \cdot \tfrac{1}{4} g \cdot h} = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{1}{2}gh}}}.$$

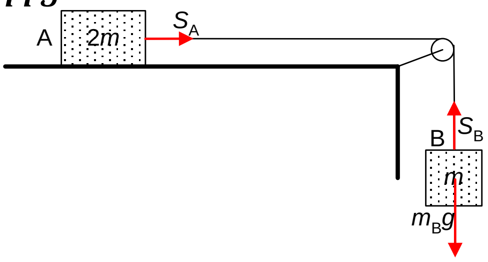
c) Legge nullnivå for potensiell energi der klossen treffer gulvet. I starten har systemet kun potensiell energi i tyngdefeltet. Idet klossen treffer gulvet, har både klossen og sylinderen kinetisk energi. Da kan vi sette opp energilikningen nedenfor, der vi husker at sylinderen har kinetisk energi både fordi dens massesenter har samme fart som klossen, og fordi sylinderen roterer om sin symmetriakse:

$$\tfrac{1}{2}m_k v^2 + \tfrac{1}{2}m_s v^2 + \tfrac{1}{2}I_C \omega^2 = m_k gh$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2} \cdot 2m \cdot v^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} \cdot 2m \cdot R^2\right) \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = mgh$$

$$2v^2 = gh \quad \Leftrightarrow \quad v = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{1}{2}gh}}}.$$

Oppgave 6.13:



a) Tegner inn de kreftene som virker, og benytter at snordraget S er like stort i begge ender av snora. Med positiv retning i bevegelsesretningen blir Newtons 2. lov for kloss A:

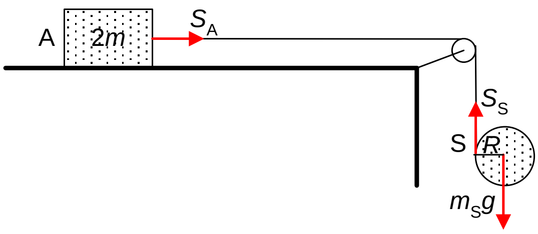
$$S = m_A a .$$

Newtons 2. lov for kloss B blir

$$m_B g - S = m_B a .$$

Her har jeg også benyttet at begge klossene har samme akselerasjon a. Legger sammen likningene, og får

$$m_B g = m_A a + m_B a = (2m + m)a = 3ma \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = \tfrac{1}{3} g}} .$$



b) Newtons 2. lov for kloss A blir som før

$$S = m_A a_A = (2m) \cdot a_A .$$

Videre har vi Newtons 2. lov for sylinderen:

$$mg - S = ma_C \quad \Leftrightarrow \quad S = m(g - a_C)$$

der a_C er sylinderaksens akselerasjon, og jeg har benyttet at $m_s = m$.

For sylinderen setter vi opp kraftmomentsetningen om sylinderaksen:

$$S \cdot R = I_C \alpha = \left(\tfrac{1}{2} m_S R^2\right)\alpha \quad \Leftrightarrow \quad S = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot \alpha R .$$

Dersom snoras hadde vært festet i sin øvre ende, ville vi hatt sammenhengen $a_C = \alpha R$ siden snora ikke glir på sylinderen. Men snora har samme akselerasjon a_A som klossen A. Derfor blir

$$a_C = a_A + \alpha R \quad \Leftrightarrow \quad \alpha R = a_C - a_A .$$

Setter dette inn i kraftmomentsetningen, og samler de tre uttrykkene jeg nå har for snorkraften S:

$$S = \tfrac{1}{2} m(a_C - a_A).$$

$$S = (2m) a_A .$$

$$S = m(g - a_C) .$$

Av de to første likningene får vi nå

$$\tfrac{1}{2} m(a_C - a_A) = 2m \cdot a_A \quad \Leftrightarrow \quad a_C = 5a_A .$$

Av de to siste likningene får vi

$$2ma_A = m(g - a_C) \quad \Leftrightarrow \quad a_C = g - 2a_A .$$

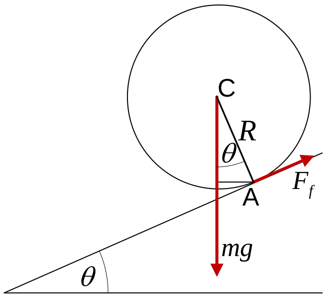
Så settes disse to uttrykkene for a_C lik hverandre:

$$5a_A = g - 2a_A \quad \Leftrightarrow \quad a_A = \underline{\underline{\tfrac{1}{7} g}} .$$

$$a_C = 5a_A = \underline{\underline{\tfrac{5}{7} g}} .$$

Oppgave 6.14:

a)



Problemet løses enklest ved å bruke kraftmomentsetningen om A. Da vil den friksjonskraften F_f som hindrer legemet fra å gli ikke få noe kraftmoment. Vi må imidlertid beregne legemets treghetsmoment om A ved hjelp av Steiners setning:

$$I_\mathrm{A} = I_\mathrm{C} + mR^2 .$$

Da blir kraftmomentsetningen om A:

$$mg \cdot R\sin\theta = I_\mathrm{A}\alpha = \left(I_\mathrm{C} + mR^2\right)\cdot\frac{a}{R} \quad\Leftrightarrow\quad a = \frac{mgR^2\sin\theta}{I_\mathrm{C} + mR^2} = \underline{\underline{\frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_\mathrm{C}}{mR^2}}}} .$$

Vi kan også bruke kraftmomentsetningen om C, kombinert med Newtons 2. lov:

$$F_f \cdot R = I_\mathrm{C}\alpha = I_\mathrm{C}\cdot\frac{a}{R} \quad\Leftrightarrow\quad F_f = \frac{I_\mathrm{C}}{R^2}\cdot a$$

$$mg\sin\theta - F_f = m\cdot a \quad\Leftrightarrow\quad mg\sin\theta = \frac{I_\mathrm{C}}{R^2}\cdot a + ma = \left(\frac{I_\mathrm{C}}{R^2} + m\right)a$$

$$\Leftrightarrow\quad a = \frac{mg\sin\theta}{\frac{I_\mathrm{C}}{R^2} + m} = \underline{\underline{\frac{g\sin\theta}{\frac{I_\mathrm{C}}{mR^2} + 1}}}$$

Vi kan også bruke energi. Når legemet har rullet en strekning L ned skråplanet, blir

$$mg\cdot L\sin\theta = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I_\mathrm{C}\omega^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I_\mathrm{C}\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(m + \frac{I_\mathrm{C}}{R^2}\right)v^2$$

$$\Leftrightarrow\quad v^2 = \underline{\frac{2gL\sin\theta}{1 + \frac{I_\mathrm{C}}{mR^2}}}$$

Siden akselerasjonen er konstant ned skråplanet, og startfarten $v_0 = 0$, er

$$v^2 - {v_0}^2 = 2aL \quad\Leftrightarrow\quad a = \frac{1}{2L}\cdot v^2 = \frac{1}{2L}\cdot\frac{2gL\sin\theta}{1 + \frac{I_\mathrm{C}}{mR^2}} = \underline{\underline{\frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_\mathrm{C}}{mR^2}}}}$$

b) Beregner først akselerasjonene til de to legemene:

Sylinderskallet: $$a_\mathrm{S} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{mR^2}{mR^2}} = \frac{g\sin\theta}{1+1} = \frac{g\sin\theta}{2} = \underline{\tfrac{1}{2}g\sin\theta} .$$

Kula: $$a_\mathrm{K} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{\frac{2}{5}mR^2}{mR^2}} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{g\sin\theta}{\frac{7}{5}} = \underline{\tfrac{5}{7}g\sin\theta} .$$

Strekningene som legemene tilbakelegger i løpet av en tid t blir:

Sylinderskallet: $s_S = \frac{1}{2}a_S t^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}g\sin\theta\cdot t^2 = \frac{1}{4}gt^2\sin\theta$.

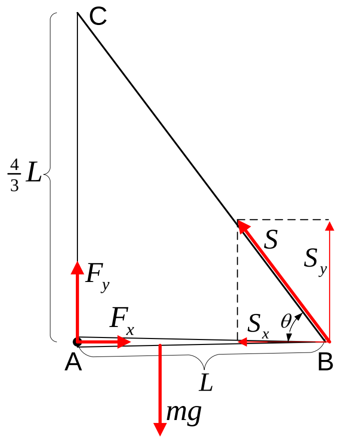
Kula: $s_K = \frac{1}{2}a_K t^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}g\sin\theta\cdot t^2 = \frac{5}{14}gt^2\sin\theta$.

Når $s_K = L$, får vi

$$\frac{s_S}{L} = \frac{\frac{1}{4}gt^2\sin\theta}{\frac{5}{14}gt^2\sin\theta} = \frac{7}{10} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{s_S = \frac{7}{10}L}}.$$

Oppgave 6.15:

a)



Legger momentakse i A slik at F_x, F_y og S_x ikke gir noe kraftmoment. Da får vi at

$$S_y\cdot L - mg\cdot\frac{1}{3}L = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{S_y = \frac{1}{3}mg}.$$

Av geometrien ser vi at strekningen BC blir

$$\sqrt{L^2 + \left(\frac{4}{3}L\right)^2} = \sqrt{\left(1+\frac{16}{9}\right)L^2} = \frac{5}{3}L$$

slik at

$$\sin\theta = \frac{\frac{4}{3}L}{\frac{5}{3}L} = \frac{4}{5}, \qquad \cos\theta = \frac{L}{\frac{5}{3}L} = \frac{3}{5}.$$

Da blir

$$\frac{S_y}{S} = \sin\theta \quad\Leftrightarrow\quad S = \frac{S_y}{\sin\theta} = \frac{\frac{1}{3}mg}{\frac{4}{5}} = \underline{\underline{\frac{5}{12}mg}}.$$

Videre blir

$$F_x - S_x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad F_x = S\cos\theta = \frac{5}{12}mg\cdot\frac{3}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{4}mg}}.$$

$$F_y + S_y - mg = 0 \quad\Leftrightarrow\quad F_y = mg - S_y = mg - \frac{1}{3}mg = \underline{\underline{\frac{2}{3}mg}}.$$

b) Kraftmomentsetningen, akse i A:

$$mg\cdot\frac{1}{3}L = I_A\cdot\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = \frac{mg\cdot\frac{1}{3}L}{\frac{1}{6}mL^2} = \underline{\underline{\frac{2g}{L}}}.$$

c) Bommens massesenter senkes en høyde $h = \frac{1}{3}L$ når bommen går fra horisontal til vertikal posisjon. Bevaring av energi:

$$mg\cdot h = \frac{1}{2}I_A\omega^2 \quad\Leftrightarrow\quad \omega^2 = \frac{mgh}{\frac{1}{2}I_A} = \frac{mg\cdot\frac{1}{3}L}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}mL^2} = \frac{4g}{L} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{\omega = 2\sqrt{\frac{g}{L}}}}.$$

d) Her er spinnet om A bevart. Benytter også at når bommen har fått en vinkelhastighet $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega$, har partikkelen på enden av bommen er fart $v = \omega_1\cdot L = \frac{1}{2}\omega L$. Da blir

$$I_A\omega = I_A\omega_1 + m_P vL \quad\Leftrightarrow\quad m_P vL = I_A\omega - I_A\omega_1 = I_A\omega - I_A\cdot\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}I_A\omega$$

$$\Leftrightarrow\quad m_P = \frac{\frac{1}{2}I_A\omega}{vL} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}mL^2\cdot\omega}{\left(\frac{1}{2}\omega L\right)\cdot L} = \underline{\underline{\frac{1}{6}m}}$$

Oppgave 6.16:

a) 1) Steiners setning:

$$I_A = I_C + m{x_C}^2 \quad \Leftrightarrow \quad I_C = I_A - m{x_C}^2 = \tfrac{1}{5}ml^2 - m \cdot \left(\tfrac{2}{5}l\right)^2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{25}ml^2}} \,.$$

2) Punktet O ligger $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}l = \frac{1}{4}l$ fra massesenteret C. Bruker på nytt Steiners setning:

$$I_O = I_C + m \cdot \left(\tfrac{1}{5}l\right)^2 = \tfrac{1}{25}l^2 + \tfrac{1}{25}l^2 = \underline{\underline{\tfrac{2}{25}ml^2}} \,.$$

b) 1) Stangas tyngdepunkt er senket en strekning $h = \frac{1}{5}l$.

Tapt potensiell energi er gått over til kinetisk energi:

$$W_{kin} = mgh = mg \cdot \tfrac{1}{5}l = \underline{\underline{\tfrac{1}{5}mgl}} \,.$$

2) Punktet O er i ro. Da er den kinetiske energien rotasjonsenergi rundt O:

$$W_{kin} = \tfrac{1}{2}I_O\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{5}mgl = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{25}ml^2\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \underline{\underline{\sqrt{\frac{5g}{l}}}} \,.$$

3) Siden massesenteret ligger $\frac{1}{5}l$ fra O, blir farten

$$v_C = \omega \cdot \tfrac{1}{5}l = \sqrt{\frac{5g}{l}} \cdot \tfrac{1}{5}l = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{1}{5}gl}}} \,.$$

c) Vi vet at vektorsummen av de ytre kreftene er lik legemets masse multiplisert med massesenterets akselerasjon. Idet stanga passerer horisontal-stillingen, er horisontal-komponenten av akselerasjon lik sentripetalakselerasjonen. Da befinner massesenteret seg i en sirkelbevegelse med radius $R = \frac{1}{5}l$ med momentan fart $v_C = \sqrt{\frac{1}{5}gl}$. Det virker da en sentripetalkraft

$$F = m \cdot \frac{{v_C}^2}{R} = m \cdot \frac{\frac{1}{5}gl}{\frac{1}{5}l} = \underline{\underline{mg}} \,.$$

d) Betrakter flaggstang og måse som ett sammensatt legeme. Siden måsen sitter fast i en avstand $\frac{4}{5}l$ fra O, får det sammensatte legemet (flaggstang pluss måse) et treghets-moment om O:

$$I_1 = I_O + \left(\tfrac{1}{8}m\right) \cdot \left(\tfrac{4}{5}l\right)^2 = \tfrac{2}{25}ml^2 + \tfrac{2}{25}ml^2 = \underline{\tfrac{4}{25}ml^2} \,.$$

Kaller vinkelfarten etter sammenstøtet for ω_1. Det virker ingen ytre kraftmoment på dette systemet når aksen plasseres i O. Da kan setningen om spinnbevaring brukes.

$$I_O\omega = I_1\omega_1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1 = \frac{I_O}{I_1}\omega_0 = \frac{\frac{2}{25}ml^2}{\frac{4}{25}ml^2}\omega_0 = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\omega_0}} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{5g}{l}}}} \,.$$

Oppgave 6.17:

a) Sammensatt treghetsmoment om aksen er

$$I = \tfrac{1}{2}m_1r^2 + m_2R^2 = \tfrac{1}{2} \cdot (50\,\mathrm{kg}) \cdot (0.20\,\mathrm{m})^2 + (10\,\mathrm{kg}) \cdot (1.0\,\mathrm{m})^2 = \underline{\underline{11.0\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}} \,.$$

b1) Når kassen går oppover med konstant fart, har klossen ingen akselerasjon og trinsa ingen vinkelakselerasjon. Da er

$$mg \cdot r - F \cdot R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{mgr}{R} = \frac{(80\,\mathrm{kg}) \cdot (9.81\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (0.20\,\mathrm{m})}{1.0\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{157\,\mathrm{N}}} \,.$$

b2) Når et punkt på periferien av den lille trinsa har flyttet seg en strekning $s = \theta r$ der θ er dreiningsvinkelen, har et punkt på periferien av den store trinsa flyttet seg en strekning $S = \theta R$. I dette tilfellet er s antall meter som kassen er hevet, og S er antall meter tau som lagerarbeideren har halt inn. Da blir

$$\frac{S}{s} = \frac{\theta R}{\theta r} \quad \Leftrightarrow \quad S = s \cdot \frac{R}{r} = 5.0\,\text{m} \cdot \frac{1.0\,\text{m}}{0.20\,\text{m}} = \underline{\underline{25\,\text{m}}}.$$

b3) Når kassen er hevet 5.0 m, har altså lagerarbeideren halt inn 25m tau med en kraft på 157N. Han har da utført et arbeid på

$$W = F \cdot S = (25\,\text{m}) \cdot (157\,\text{N}) = \underline{\underline{3925\,\text{J}}}.$$

(Merknad: Dette arbeidet er lik økingen i kassens potensielle energi. Dette kan brukes til å finne det arbeidet som utføres i punkt 2) ovenfor.)

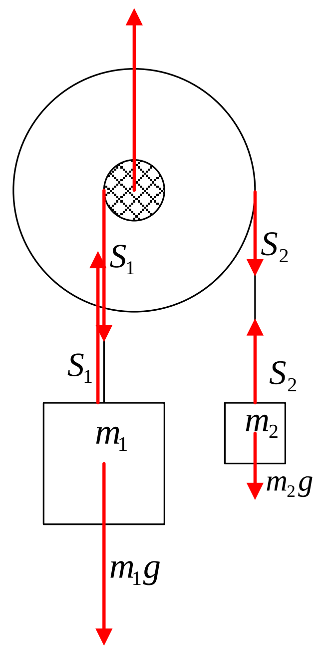
b4) Når kassen beveger seg oppover med en fart på $0.20\,\text{m/s}$, må det tauet som lager-arbeideren trekker i bevege seg nedover med en fart på

$$v = (0.20\,\text{m/s}) \cdot \frac{R}{r} = (0.20\,\text{m/s}) \cdot \frac{1.0\,\text{m}}{0.20\,\text{m}} = 1.0\,\text{m/s}$$

ut fra samme resonnement som i spørsmål 2). Arbeiderens effekt er da

$$P = F \cdot v = (157\,\text{N}) \cdot (1.0\,\text{m/s}) = \underline{\underline{157\,\text{W}}}.$$

c)



Trinsa vil rotere fordi summen av kraftmomentene som virker på systemet ikke er lik null. Den opprinnelige kassen gir et kraftmoment om aksen på

$$m_1 g r = (80\,\text{kg}) \cdot (9.81\,\text{m/s}^2) \cdot (0.20\,\text{m}) = 157\,\text{Nm}$$

med dreieretning mot urviseren. Den nye kassen gir et kraftmoment om aksen på

$$m_2 g R = (20\,\text{kg}) \cdot (9.81\,\text{m/s}^2) \cdot (1.0\,\text{m}) = 196\,\text{Nm}$$

med dreieretning med urviseren. Nå er det snordragene (og ikke kassenes tyngder) som er de kreftene som virker på trinsa. Men snordraget fra den nye kassen vil gi størst kraftmoment, slik at <u>trinsa vil dreie med urviseren</u>.

Vi kaller snordragene S_1 og S_2, og setter opp Newtons 2. lov for kassene, når dreieretning mot urviseren defineres som positiv:

$$S_1 - m_1 g = m_1 a_1 \quad \Leftrightarrow \quad S_1 = m_1 (g + a_1)$$

$$m_2 g - S_2 = m_2 a_2 \quad \Leftrightarrow \quad S_2 = m_2 (g - a_2)$$

der a_1 og a_2 er akselerasjonene til de to kassene.

Kraftmomentsetningen for trinsa blir:

$$S_2 R - S_1 r = I\alpha.$$

Videre er

$$a_1 = \alpha r \qquad \text{og} \qquad a_2 = \alpha R.$$

Settes disse uttrykkene inn i Newtons 2. lov for kassene, som deretter settes inn i kraftmoment-setningen, får vi

$$m_2(g-\alpha R)\cdot R - m_1(g+\alpha r)\cdot r = I\alpha$$

$$(I + m_2R^2 + m_1r^2)\alpha = (m_2R - m_1r)g$$

$$\alpha = \frac{(m_2R - m_1r)g}{I + m_2R^2 + m_1r^2} = \frac{(20\,\text{kg})\cdot(1.0\,\text{m}) - (80\,\text{kg})\cdot(0.20\,\text{m})}{(11.0 + 80\cdot 0.20^2 + 20\cdot 1.0^2)\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}\cdot 9.81\text{m/s}^2 = \underline{\underline{1.15\text{s}^{-2}}}$$

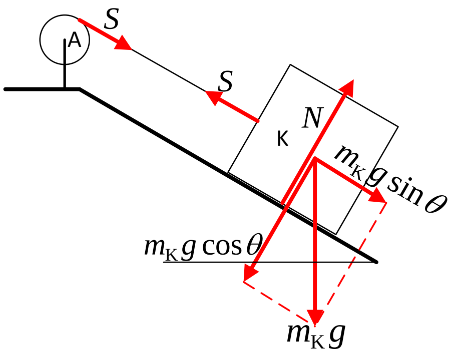
Da blir

$$S_1 = m_1(g+\alpha r) = (80\,\text{kg})\big(9.81\text{m/s}^2 + (1.15\text{s}^{-2})(0.20\,\text{m})\big) = \underline{\underline{803\,\text{N}}}.$$

$$S_2 = m_2(g-\alpha R) = (20\,\text{kg})\big(9.81\text{m/s}^2 - (1.15\text{s}^{-2})(1.0\,\text{m})\big) = \underline{\underline{173\,\text{N}}}.$$

Oppgave 6.18:

a)



For klossen gjelder (langs skråplanet):

$$mg\sin\theta - S = ma \quad\Leftrightarrow\quad S = m\left(\tfrac{1}{2}g - a\right)$$

fordi $\sin\theta = \sin 30° = \tfrac{1}{2}$.

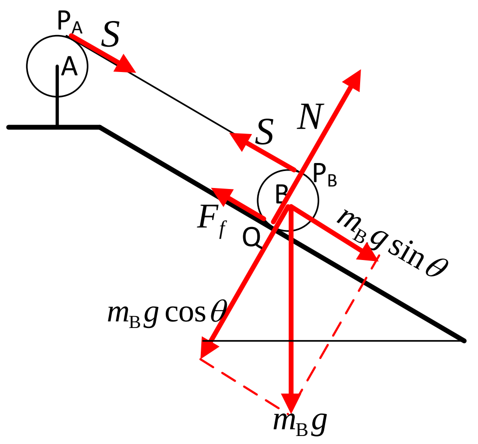
For sylinderen gjelder (når rotasjonsaksen er momentakse):

$$S\cdot R = \tfrac{1}{2}mR^2\cdot\alpha \quad\Leftrightarrow\quad S = \tfrac{1}{2}mR\alpha.$$

Men $a = \alpha R$. Setter de to uttrykkene for S lik hverandre, og får

$$\tfrac{1}{2}ma = m\left(\tfrac{1}{2}g - a\right) \quad\Leftrightarrow\quad a = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}g}}.$$

b)



I) Lar P_A og P_B være snoras berøringspunkter med henholdsvis sylinder A og sylinder B. Disse to punktene må ha samme akselerasjon a. Sylinder A roterer om sin akse, slik at $a = \alpha R$. Sylinder B roterer om berøringspunktet Q med skråplanet (fordi sylinderen ruller uten å gli), slik at $a = \alpha_B\cdot 2R$. Altså er

$$\alpha_A\cdot R = 2\alpha_B\cdot R \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{\alpha_A = 2\alpha_B}}.$$

II) Setter opp kraftmomentsetningen for A omkring aksen slik at krefter i aksen ikke gir noe kraftmoment:

$$S\cdot R = \tfrac{1}{2}mR^2\cdot\alpha_A \quad\Leftrightarrow\quad S = \tfrac{1}{2}mR\alpha_A.$$

Setter opp kraftmomentsetningen for B omkring punktet Q slik at krefter i dette punktet ikke gir noe kraftmoment. Finner først sylinderens treghetsmomentet om Q:

$$I_Q = I_C + mR^2 = \tfrac{1}{2}m^2 + mR^2 = \tfrac{3}{2}mR^2.$$

Benytter at $\sin\theta = \sin 30° = \tfrac{1}{2}$. Kraftmomentsetningen om Q blir da

$$mg\cdot R\sin\theta - S\cdot 2R = \tfrac{3}{2}mR^2\cdot\alpha_B \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}mg - 2S = \tfrac{3}{2}mR\alpha_B.$$

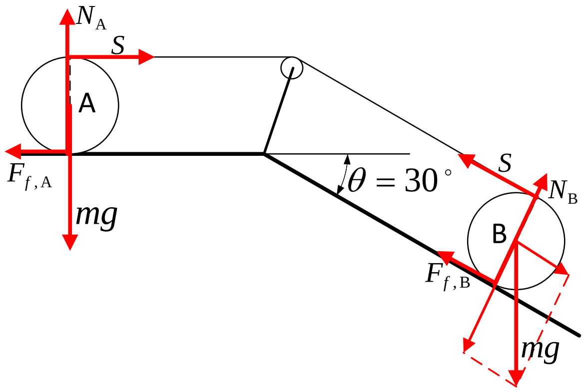
Setter inn for S og deretter for α_A, og får:

$$\tfrac{1}{2}mg - 2\cdot\tfrac{1}{2}mR\cdot 2\alpha_{\mathrm{B}} = \tfrac{3}{2}mR\alpha_{\mathrm{B}} \quad\Leftrightarrow\quad g - 4R\alpha_{\mathrm{A}} = 3R\alpha_{\mathrm{A}} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha_{\mathrm{A}} = \underline{\underline{\tfrac{1}{7}\frac{g}{R}}}.$$

Deretter blir

$$\alpha_{\mathrm{A}} = 2\alpha_{\mathrm{B}} = \underline{\underline{\tfrac{2}{7}\frac{g}{R}}}.$$

Oppgave 6.19:



a) De kreftene som virker på sylindrene er tegnet inn til venstre. Merk at det må være friksjonskrefter $F_{f,\mathrm{A}}$ og $F_{f,\mathrm{B}}$ mellom underlaget og sylindrene som hindrer sylindrene i å gli.

b) Når en snorlengde Δs vikles av sylinder A i et tidsintervall Δt, må like lang snorlengde vikles på sylinder B i samme tidsintervall. Begge sylindrene ruller uten å gli, og deres bevegelse kan oppfattes som en rotasjon rundt en akse langs berøringslinja med underlaget. Siden begge sylindrene har samme radius, vil de til enhver tid ha samme vinkelfart. Da må de også ha samme vinkelakselerasjon.

c) En sylinders treghetsmoment om berøringspunktet med underlaget er

$$I = \tfrac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \tfrac{3}{2}mR^2.$$

For begge sylinderne setter jeg opp kraftmomentsetningen med momentpunkt på sylindrenes berøringslinje med underlaget. Da vil verken normalkraft eller friksjonskraft gi noe kraftmoment. For sylinder A vil ikke tyngden gi noe kraftmoment, og for B vil ikke tyngdekomponenten vinkelrett på skråplanet gi noe kraftmoment. Vi får:

Sylinder A: $S\cdot 2R = \tfrac{3}{2}mR^2\cdot\alpha$.

Sylinder B: $mg\sin\theta\cdot R - S\cdot 2R = \tfrac{3}{2}mR^2\cdot\alpha$.

Adderes disse likningene, får vi

$$mg\sin\theta\cdot R = 3mR^2\cdot\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = \frac{g\sin\theta}{3R} = \frac{g\cdot\frac{1}{2}}{3R} = \underline{\underline{\tfrac{1}{6}\frac{g}{R}}}.$$