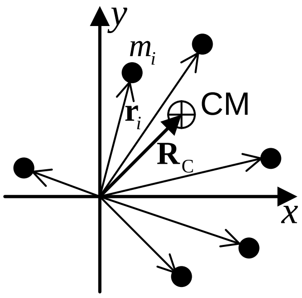
Beregning av massesenter.

1. Definisjoner.



Figuren til venstre viser et lite utsnitt av en ”sky” av små partikler, der m_i er massen til en partikkel som har posisjonsvektor $\mathbf{r}_i$ i forhold til et fastlagt origo. Selv om figuren er todimensjonal, vil partikkelskyen generelt være tredimensjonal, slik at posisjonsvektoren kan skrives

$$\mathbf{r}_i = x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$$

der $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer langs henholdsvis *x*- *y*- og *z*-aksen. I grunnteksten har vi definert nå posisjonsvektoren $\mathbf{R}_{\mathrm{CM}}$ til partikkelskyens ***massesenter*** (CM) slik:

Massesenterets posisjon $\mathbf{R}_{\mathrm{CM}}$ i forhold til origo er

$$\mathbf{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m}\sum m_i\mathbf{r}_i$$

der den samlede massen til alle partiklene er

$$m = \sum m_i \ .$$

Vi summerer over alle partiklene.

I praksis får vi mest å gjøre med sammenhengende, utstrakte legemer. Vi tenker oss at slike legemer er ”limt” sammen av bitte små biter, som hver har masse *dm*. Istedenfor å summere, må vi nå integrere:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m}\int \mathbf{r}\,dm$$

der legemets samlede masse er

$$m = \int dm$$

og integrasjonene tas over hele legemet. Men ”integrasjon over hele legemet” medfører at vi må integrere *i rommet*. Jeg forventer ikke at dere kan dette. Vi skal derfor begrense oss til å se på spesielle typer legemer, som vi kan handtere med vanlig integrasjonsteknikk, d.v.s. med skivemetoden og sylinderskallmetoden.

Vi skal begrense oss til romlegemer som har konstant tetthet ρ. Dersom hele legemet har masse *m* og volum *V*, og en liten bit av legemet har masse *dm* og volum *dV*, så er tettheten

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \quad \Leftrightarrow \quad dm = \frac{m}{V}dV \ .$$

Dette gir

$$\mathbf{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m}\int \mathbf{r}\,dm = \frac{1}{\cancel{m}}\int \mathbf{r}\left(\frac{\cancel{m}}{V}dV\right) = \frac{1}{V}\int \mathbf{r}dV \ .$$

Vi dekomponerer nå både $\mathbf{r}$ og $\mathbf{R}_{\mathrm{CM}}$ ved hjelp av enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$, og får

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

og

$$\mathbf{R}_{\mathrm{CM}} = X_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{i}} + Y_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{j}} + Z_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Da blir

$$\mathbf{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{V}\int \mathbf{r}dV$$

$$X_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{i}} + Y_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{j}} + Z_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{V}\int \left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\right)dV$$

$$= \left(\frac{1}{V}\int x\,dV\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{1}{V}\int y\,dV\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{1}{V}\int z\,dV\right)\hat{\mathbf{k}}$$

som gir komponentlikningene

$$X_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{V}\int xdV\,, \qquad Y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{V}\int ydV\,, \qquad Z_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{V}\int zdV\,.$$

Vi summerer opp:

Dersom et legeme har konstant tetthet ρ, er massesenterets posisjonsvektor

$$\mathbf{R}_{\mathrm{CM}} = X_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{i}} + Y_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{j}} + Z_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{k}}$$

gitt ved

$$X_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{V}\int xdV\,, \qquad Y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{V}\int ydV\,, \qquad Z_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{V}\int zdV\,,$$

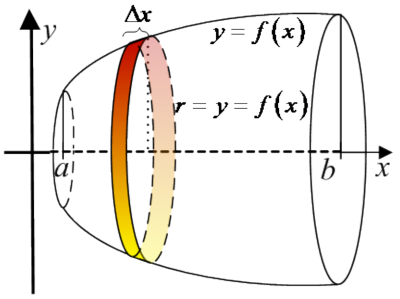
der V er legemets volum, og alle integrasjonene tas over hele legemet.

2. Massesenter for rotasjons-symmetriske legemer.

Vi kan få et rotasjons-symmetrisk legeme ved å la grafen til funksjonen

$$y = f(x),\ a \le x \le b,$$

rotere om x-aksen. Det er umiddelbart klart at dersom tettheten til legemet er konstant må massesenteret ligge på x-aksen slik at $Y_{\mathrm{CM}} = Z_{\mathrm{CM}} = 0$. Vi trenger bare å finne X_{CM}, og bruker skivemetoden.



Alle de små volumelementene som utgjør ei tynn skive med tykkelse dx vinkelrett på x-aksen har samme x-koordinat. Skiva har da volum

$$dV = \pi y^2 dx\,.$$

Siden legemets volum er

$$V = \int_{x=a}^{x=b} dV = \int_a^b \pi y^2 dx$$

blir

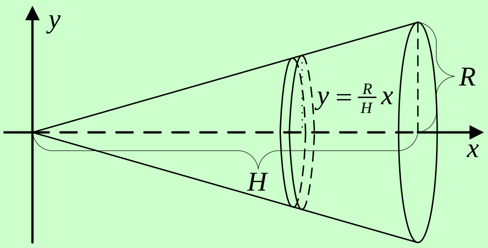
$$X_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{V}\int_{x=a}^{x=b} x\cdot dV = \frac{1}{V}\int_{x=a}^{x=b} x\cdot\pi y^2 dx = \frac{\pi\int_{x=a}^{x=b} x\cdot y^2 dx}{\pi\int_{x=a}^{x=b} y^2 dx} = \underline{\underline{\frac{\int_{x=a}^{x=b} x\cdot y^2 dx}{\int_{x=a}^{x=b} y^2 dx}}}\,.$$

Vi kan også få et rotasjons-symmetrisk legeme ved å rotere grafen til $x = f^{-1}(y)$ om *y*-aksen. Da må massesenteret ligge på *y*-aksen slik at $X_{\text{CM}} = Z_{\text{CM}} = 0$. På samme måte som ovenfor blir

$$Y_{\text{CM}} = \frac{1}{V}\int_{y=c}^{y=d} y \cdot dV = \frac{1}{V}\int_{y=c}^{y=d} y \cdot \pi x^2 dy = \frac{\pi\int_{y=c}^{y=d} y \cdot x^2 dy}{\pi\int_{y=c}^{y=d} x^2 dy} = \underline{\underline{\frac{\int_{y=c}^{y=d} y \cdot x^2 dy}{\int_{y=c}^{y=d} x^2 dy}}}\,.$$

***Eksempel 1*:** Finn massesenteret til en rett kjegle med høyde *H* og grunnflateradius *R*.

Løsning:



Vi plasserer kjeglen med topp-punkt i origo og *x*-aksen som symmetriakse. Vi kan da tenke oss at kjeglen framkommer ved at den rette linja

$$y = \tfrac{R}{H}x$$

roterer om *x*-aksen. Da vil massesenteret ligge på *x*-aksen, og posisjonen er gitt ved

$$X_{\text{CM}} = \frac{\int_0^H xy^2 dx}{\int_0^H y^2 dx} = \frac{\int_0^H x\left(\tfrac{R}{H}x\right)^2 dx}{\int_0^H \left(\tfrac{R}{H}x\right)^2 dx} = \frac{\left(\tfrac{R}{H}\right)^2\int_0^H x^3 dx}{\left(\tfrac{R}{H}\right)^2\int_0^H x^2 dx} = \frac{\tfrac{1}{4}\left[x^4\right]_0^H}{\tfrac{1}{3}\left[x^3\right]_0^H} = \frac{3}{4}\frac{H^4}{H^3} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}H\,.$$

Eksempel 2: Finn massesenteret til det rotasjonslegemet som framkommer når grafen til

$$y = f(x) = x^2$$

og den rette linja $y = 4$ roterer om *y*-aksen.

Løsning: Massesenteret må ligge på *y*-aksen. Siden $y = x^2$, blir innsettingen i formelen for Y_{CM} lett:

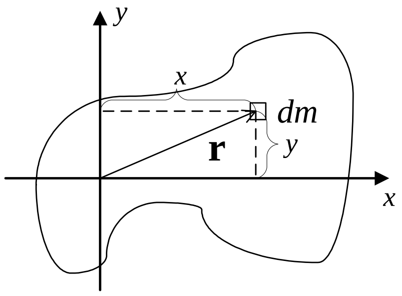
$$Y_{\text{CM}} = \frac{\int_{y=0}^{y=4} yx^2 dy}{\int_{y=0}^{y=4} x^2 dy} = \frac{\int_0^4 y \cdot y\,dy}{\int_0^4 y\,dy} = \frac{\left[\tfrac{1}{3}y^3\right]_0^4}{\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^4} = \frac{\tfrac{1}{3}\left(4^3 - 0^3\right)}{\tfrac{1}{2}\left(4^2 - 0^2\right)} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}\,.$$

`Oppgave 1`.

3. Massesenter for plane legemer.

3.1. De grunnleggende formlene.

Vi skal nå se på *plane legemer*. Det er mest praktisk å legge plane legemer i *xy*-planet, slik at det ikke blir noen *z*-komponent. Massesenteret er da gitt ved



$$\mathbf{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m}\int \mathbf{r}\,dm = \frac{1}{m}\int \left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}\right)dm$$

$$= \left(\frac{1}{m}\int x\,dm\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{1}{m}\int y\,dm\right)\hat{\mathbf{j}} = X_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{i}} + Y_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{j}}$$

Her er

$$X_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m}\int x\,dm, \qquad Y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m}\int y\,dm$$

Integralene i uttrykkene for X_{CM} og Y_{CM} har fått egne navn:

$\int x \cdot dm$ kalles **statisk moment om *y*-aksen**.

$\int y \cdot dm$ kalles **statisk moment om *x*-aksen**.

Vi får enklere uttrykk dersom vi antar at tettheten er konstant over hele flata. Tettheten må nå uttrykkes i kg/m^2. Dersom flata har masse *m* og areal *A*, mens et lite flate-element har masse *dm* og areal *dA*, blir tettheten

$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{dm}{dA} \quad \Leftrightarrow \quad dm = \frac{m}{A}dA.$$

Dermed blir

$$X_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m}\int x\,dm = \frac{1}{\cancel{m}}\int x\left(\frac{\cancel{m}}{A}dA\right) = \frac{1}{A}\int x\,dA,$$

$$Y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m}\int y\,dm = \frac{1}{\cancel{m}}\int y\left(\frac{\cancel{m}}{A}dA\right) = \frac{1}{A}\int y\,dA,$$

der arealet av flata er

$$A = \int dA.$$

Dette er de grunnleggende formlene som vi skal benytte i praksis.

Også her har integralene fått egne navn:

$M_y = \int x\,dA$ kalles **flatemomentet om *y*-aksen**,

$M_x = \int y\,dA$ kalles **flatemomentet om *x*-aksen**.

Med disse definisjonene kan koordinatene til massesenteret skrives:

$$X_{\mathrm{CM}} = \frac{M_y}{A}, \qquad Y_{\mathrm{CM}} = \frac{M_x}{A}.$$

Vi summerer opp:

Massesenteret for ei flate som ligger i *xy*-planet er

$$\mathbf{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m}\int \mathbf{r}\,dm = X_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{i}} + Y_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{j}}$$

der

$$X_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m}\int x\,dm \ , \qquad\qquad Y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m}\int y\,dm \ .$$

Dersom tettheten er konstant over hele flata, blir

$$X_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{A}\int xdA = \frac{M_y}{A}$$ der $M_y = \int x\,dA$ er flatemomentet om y-aksen,

$$Y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{A}\int ydA = \frac{M_x}{A}$$ der $M_x = \int y\,dA$ er flatemomentet om x-aksen.

$$A = \int dA$$

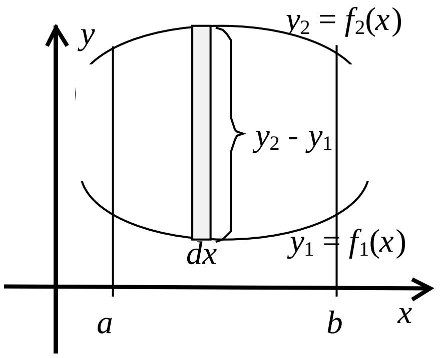
Alle integralene tas over hele flata.

Når vi skal integrere over ei flate, får vi vanligvis *dobbeltintegral* som vi ikke skal ta opp her. Vi skal derfor begrense oss til to situasjoner som vi kan handtere:

1. Flata deles opp i striper parallelt med y-aksen.
2. Flata deles opp i striper parallelt med x-aksen.

Vi skal se på de to situasjonene etter tur.

3.2. Striper parallelt med *y*-aksen.



Vi antar at flata er avgrenset av grafene til funksjonene

$$y_1 = f_1(x) \text{ og } y_2 = f_2(x),$$

samt av de to rette linjene

$$x = a \text{ og } x = b.$$

Se figuren til venstre.
Vi legger striper med bredde dx parallelt med y-aksen.
Hvis $y_2 > y_1$ når $a \le x \le b$, får hver stripe et areal

$$dA = (y_2 - y_1)dx$$

slik at

$$A = \int_{x=a}^{x=b} (y_2 - y_1)dx \, .$$

Alle flate-elementene innenfor ei stripe har nå samme x-verdi. Da blir massesenterets x-verdi

$$X_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{A}\int_{x=a}^{x=b} xdA = \underline{\underline{\frac{1}{A}\int_{x=a}^{x=b} x(y_2 - y_1)dx}} \, .$$

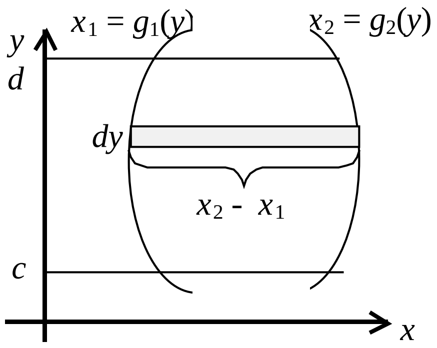
Det er ikke fullt så enkelt å finne Y_{CM}, fordi elementene innenfor ei stripe har *ulike* y-verdier. Vi kan derfor ikke bruke formelen for Y_{CM} direkte. Dette problemet løser vi ved å erstatte y i formelen for Y_C med avstanden til *midtpunktet* på stripa, som har y-koordinat

$$y_{\mathrm{M}} = \frac{y_2 + y_1}{2} \, .$$

Da blir

$$Y_C = \frac{1}{A}\int_{x=a}^{x=b} y_{\mathrm{M}} \cdot dA = \frac{1}{A}\int_{x=a}^{x=b} \frac{y_2 + y_1}{2}(y_2 - y_1)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2A}\int_{x=a}^{x=b} (y_2^{\,2} - y_1^{\,2})dx}} \, .$$

3.3. Striper parallelt med *x*-aksen.



Vi skal nå anta at flata er avgrenset av grafene til $x_1 = g_1(y)$ og $x_2 = g_2(y)$ samt de to rette linjene $y = c$ og $y = d$. Da legger vi stripene parallelt med *x*-aksen. Se figuren til venstre.

Vi finner massesenteret med samme resonnement som når stripene ligger loddrett. Dersom $x_2 > x_1$ når $c \le y \le d$, blir

$$A = \int_{y=c}^{y=d} (x_2 - x_1)\,dy$$

og

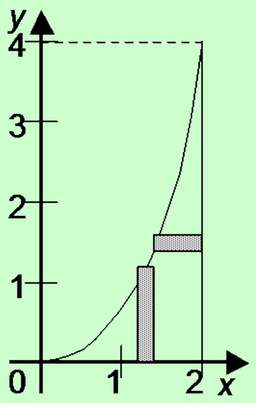
$$\underline{\underline{Y_{CM} = \frac{1}{A}\int_{y=c}^{y=d} y\cdot(x_2 - x_1)\,dy}},$$

$$\underline{\underline{X_{CM} = \frac{1}{2A}\int_{x=c}^{x=d} \left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right)dy}}.$$

Eksempel 3: Bestem massesenteret til flata som avgrenses av grafen til $y = x^2$, linja $x = 2$ og *x*-aksen på to måter:

a) ved å legge stripene parallelt med *y*-aksen.
b) ved å legge stripene parallelt med *x*-aksen.

Løsning: Situasjonene er illustrert nedenfor til venstre.



a) En loddrett stripe i avstand *x* fra *y*-aksen har areal

$$dA = y\cdot dx = x^2 dx$$

slik at arealet blir

$$A = \int_0^2 x^2 dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \tfrac{1}{3}\left(2^3 - 0^3\right) = \underline{\tfrac{8}{3}}.$$

Da blir massesenterets *x*-koordinat

$$X_{CM} = \frac{1}{A}\int_{x=0}^{x=2} x(y_2 - y_1)\,dx = \frac{1}{\frac{8}{3}}\int_0^2 x\cdot\left(x^2 - 0\right)dx$$

$$= \tfrac{3}{8}\left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \tfrac{3}{32}\left(2^4 - 0^4\right) = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}}}$$

Massesenterets *y*-koordinat blir

$$Y_{CM} = \frac{1}{2A}\int_{x=0}^{x=2}\left(y^2 - 0^2\right)dx = \frac{1}{2\cdot\frac{8}{3}}\int_0^2 \left(x^2\right)^2 dx = \tfrac{3}{16}\cdot\left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \tfrac{3}{16}\cdot\tfrac{1}{5}\left(2^5 - 0\right) = \underline{\underline{\tfrac{6}{5}}}.$$

b) Når vi skal bruke striper parallelle med *x*-aksen, må vi først finne *x* uttrykt ved *y*:

$$y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{y}.$$

Vi kan selvsagt bruke det arealet som vi fant ovenfor. Men vi kan også beregne arealet også med utgangspunkt i vannrette striper. Av figuren ser vi at arealet av en slik vannrett stripe i avstand *y* fra *x*-aksen blir

$$dA=(2-x)\,dy=\left(2-\sqrt{y}\right)dy$$

slik at arealet blir

$$A=\int_0^4\left(2-\sqrt{y}\right)dy=\int_0^4\left(2-y^{\frac{1}{2}}\right)dy=\left[2y-\tfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=2\cdot4-\tfrac{2}{3}\cdot\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3-0=\underline{\tfrac{8}{3}}.$$

Da blir

$$X_{\text{CM}}=\frac{1}{2A}\int_{y=0}^{y=4}\left(x_2^{\,2}-x_1^{\,2}\right)dy=\frac{1}{2\cdot\frac{8}{3}}\int_0^4\left(2^2-\left(\sqrt{y}\right)^2\right)dy=\tfrac{3}{16}\int_0^4(4-y)\,dy$$

$$=\tfrac{3}{16}\cdot\left[4y-\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^4=\tfrac{3}{16}\cdot\left(4\cdot4-\tfrac{1}{2}\cdot4^2\right)-0=\underline{\underline{\tfrac{3}{2}}}$$

$$Y_{\text{CM}}=\frac{1}{A}\int_{y=0}^{y=4}y\cdot\left(x_2-x_1\right)dy=\frac{1}{\frac{8}{3}}\int_0^4 y\left(2-\sqrt{y}\right)dy=\tfrac{3}{8}\int_0^4\left(2y-y^{\frac{3}{2}}\right)dy$$

$$=\tfrac{3}{8}\cdot\left[y^2-\tfrac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^4=\tfrac{3}{8}\cdot\left(4^2-\tfrac{2}{5}\cdot4^{\frac{5}{2}}\right)-0=\tfrac{3}{8}\cdot\left(16-\tfrac{2}{5}\cdot2^5\right)=\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{16}{5}=\underline{\underline{\tfrac{6}{5}}}$$

Oppgave 2.

4. Massesenter for krumme linjer.

En krum linje er gitt ved $y=f(x)$ eller ved $x=f^{-1}(y)$. Anta at tettheten ρ (som er gitt i kg/m) er konstant slik at

$$\rho=\frac{m}{L}=\frac{dm}{ds}\quad\Leftrightarrow\quad dm=\frac{m}{L}ds$$

der m er massen til linja, L er lengden til linja, mens dm og ds er henholdsvis masse og lengde til et lite element på linja. Koordinatene til massesenteret er da gitt ved

$$X_{\text{CM}}=\frac{1}{m}\int x\,dm=\frac{1}{\cancel{m}}\int x\left(\frac{\cancel{m}}{L}ds\right)=\frac{1}{L}\int x\,ds$$

og

$$Y_{\text{CM}}=\frac{1}{m}\int y\,dm=\frac{1}{\cancel{m}}\int y\left(\frac{\cancel{m}}{L}ds\right)=\frac{1}{L}\int y\,ds$$

der vi integrerer langs hele linja.

Vi kan finne lengden L av et krumt linjestykke på flere måter, f.eks. slik:

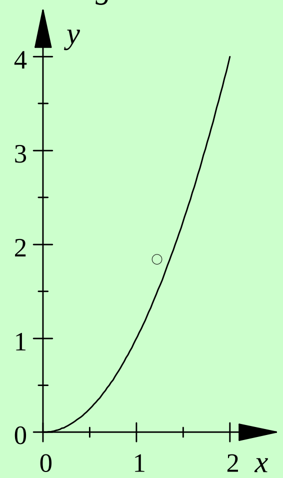
Dersom $y=f(x)$, er $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$.

Dersom $x=f^{-1}(y)$, er $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$.

Ett av disse uttrykkene setter vi inn i integralene for massesenteret.

***Eksempel 4*:** Beregn koordinatene til massesenteret til grafen til $y=x^2$, $0\le x\le 2$.

Løsning:



$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x$

slik at

$$ds = \sqrt{1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \sqrt{1+4x^2}\,dx\,.$$

Da blir

$$L = \int_{x=0}^{x=2} ds = \int_0^4 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \underline{\tfrac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)+\sqrt{17}} \approx \underline{4.6468}\,.$$

$$X_{\text{CM}} = \tfrac{1}{L}\int_{x=0}^{x=2} x\,ds = \tfrac{1}{L}\int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \tfrac{1}{L}\cdot\tfrac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-1\right) \approx \underline{\underline{1.239}}\,.$$

$$Y_{\text{CM}} = \tfrac{1}{L}\int_{x=0}^{x=2} y\,ds = \tfrac{1}{L}\int_0^2 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{L}\cdot\left(\tfrac{33}{16}\sqrt{17}-\tfrac{1}{64}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)\right) \approx \underline{\underline{1.823}}$$

På grafen er massesenteret tegnet inn med en liten ring.

Merk at massesenteret ikke ligger på selve linja. Du kan visualisere massesenteret slik: Tenk deg at linja spenner ut en masseløs membran. Denne membranen kan nå balansere på en spiss som plasseres i massesenteret.

Oppgave 3.

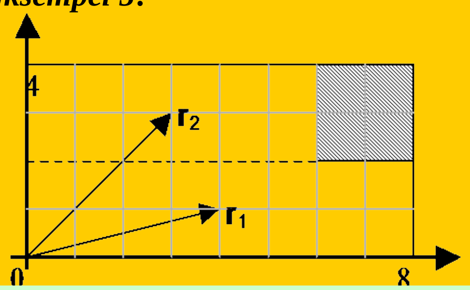
5. Oppdeling i del-legemer.

I grunnteksten har jeg vist hvordan vi kan dele opp et sammensatt legeme i kjente del-legemer, og deretter finne massesenteret til det sammensatte legemet ved å oppfatte hver del som om det var en partikkel. Vi kan føre et tilsvarende resonnement dersom vi fjerner en bit fra et legeme. Anta at m er massen og $\mathbf{R}_{\text{CM}}$ er massesenteret til et legeme som framkommer når vi fjerner et stykke med masse m_2 og massesenter $\mathbf{r}_2$ fra et legeme med masse m_1 og massesenter $\mathbf{r}_1$. Da får vi at

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{m}\left(m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2\right).$$

I neste eksempel skal vi illustrere bruken av denne formelen.

***Eksempel 5*:**



Ei skive består av et rektangel med sidekanter 8 og 4, der et kvadratisk hjørne med sidekant 2 er fjernet. Se figuren til venstre.

Finn massesenteret til skiva.

Løsning: Jeg skal løse oppgaven på to måter.
Først deler jeg skiva inn i to deler slik den stiplede linja på figuren viser. Hele skiva har areal

$$A = 8\cdot 4 - 2^2 = 28\,.$$

Dersom hele skiva har masse m, blir tettheten (som oppgis i kg/m^2)

$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{m}{28}.$$

Nedre del får massen

$$m_1 = \rho \cdot (8 \cdot 2) = \frac{m}{28} \cdot 16 = \underline{\frac{4}{7}m}$$

og øvre del får massen

$$m_2 = \rho \cdot (6 \cdot 2) = \frac{m}{28} \cdot 12 = \underline{\frac{3}{7}m}.$$

Hver av delene har massesenter midt i. Av figuren ser vi at

$$\mathbf{r}_1 = \underline{4\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}}}$$

og

$$\mathbf{r}_2 = \underline{3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}}.$$

Da blir massesenteret gitt ved

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{m}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2) = \frac{1}{m}\left(\frac{4}{7}m\left(4\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}}\right) + \frac{3}{7}m\left(3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{7}\left(16\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 9\,\hat{\mathbf{i}} + 9\hat{\mathbf{j}}\right) = \underline{\underline{\frac{25}{7}\hat{\mathbf{i}} + \frac{13}{7}\hat{\mathbf{j}}}}$$

Så skal jeg løse problemet ved å ta utgangspunkt i rektangelet, og *fjerne* bidraget fra det lille kvadratet. Hvis vi kaller rektangelets masse og massesenter for m_{R} og $\mathbf{r}_{\text{R}}$, og kvadratets masse og massesenter for m_{K} og $\mathbf{r}_{\text{K}}$, kan vi sette opp (se figuren, og kontroller massesentrene til rektangelet og til kvadratet):

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{m}(m_{\text{R}}\mathbf{r}_{\text{R}} - m_{\text{K}}\mathbf{r}_{\text{K}}) = \frac{1}{m}\left(\frac{m}{28} \cdot (8 \cdot 4) \cdot \left(4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}\right) - \frac{m}{28} \cdot (2 \cdot 2) \cdot \left(7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}\right)\right)$$

$$= \frac{8}{7}\left(4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}\right) - \frac{1}{7}\left(7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}\right) = \underline{\underline{\frac{25}{7}\hat{\mathbf{i}} + \frac{13}{7}\hat{\mathbf{j}}}}$$

Og dette er samme resultat som før.

[Oppgave 4](#).

6. Oppgaver med løsninger

6.1. Oppgaver.

Oppgave 1

a) Vi har gitt funksjonen

$$y = f(x) = x^{\frac{3}{2}},\ 0 \le x \le 4.$$

Beregn massesenteret til det omdreiningslegemet som framkommer når:

1) Flata som avgrenses av grafen til *f* og den rette linja $x = 4$ roterer en gang om *x*-aksen.
2) Flata som avgrenses av grafen til *f* og den rette linja $y = 8$ roterer en gang om *y*-aksen.

b) Ei flate avgrenses av *x*-aksen og grafen til funksjonen

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{når} \quad 0 \le x < 4 \\ 4 - \frac{1}{2}x & \text{når} \quad 4 \le x \le 8 \end{cases}$$

Beregn massesenteret til det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om *x*-aksen.

Oppgave 2

a) Grafen til funksjonen

$$y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}\ ,\ -R \le x \le R$$

blir en halvsirkel med radius *R*. Finn massesenteret til den flata som avgrenses av halvsirkelen og *x*-aksen.

c) Ei flate avgrenses av *y*-aksen, den rette linja $y = 4$ og grafen til funksjonen

$$y = f(x) = e^x\ .$$

Finn massesenteret til denne flata.

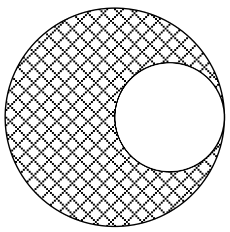
Oppgave 3

Grafen til funksjonen

$$y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}\ ,\ -R \le x \le R$$

blir en halvsirkel med radius *R*. Finn massesenteret til denne grafen.

Oppgave 4

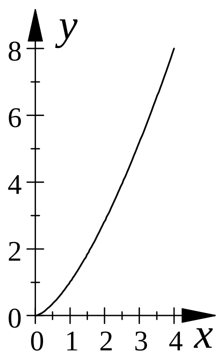


Ei jamntykk, homogen skive har radius *R*. Vi klipper ut et sirkelformet hull med radius $r = \frac{1}{2}R$ slik at sentrum i hullet ligger en avstand $\frac{1}{2}R$ fra skivas sentrum. Se figuren til venstre.
Hvor er massesenteret til skiva etter at hullet ble klipt ut?

6.2. Løsninger.

Oppgave 1

a)



Grafen til $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ er tegnet til venstre. Ved rotasjon om *x*-aksen blir åpenbart $Y_{\text{CM}} = 0$, mens

$$X_{\text{CM}} = \frac{\int_{x=0}^{x=4} x \cdot \pi y^2 dx}{\int_{x=0}^{x=4} \pi y^2 dx} = \frac{\int_0^4 x \cdot \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 dx}{\int_0^4 \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 dx} = \frac{\int_0^4 x^4 dx}{\int_0^4 x^3 dx}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^4}{\left[\frac{1}{4}x^{54}\right]_0^4} = \frac{\frac{1}{5}\left(4^5 - 0\right)}{\frac{1}{4}\left(4^4 - 0\right)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 4^5}{4^3} = \underline{\underline{\frac{16}{5}}}$$

Ved rotasjon om *y*-aksen må vi integrere i *y*-retningen. Litt forarbeid må til:

$$y = x^{\frac{3}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^{\frac{2}{3}}.$$

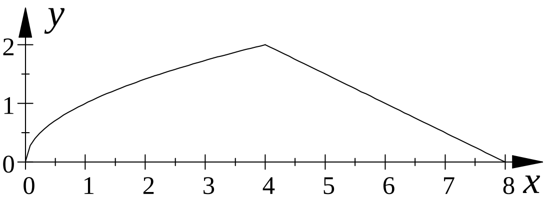
Videre ser vi at $x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$, og at $x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = 4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$.

Det er åpenbart at $X_{\text{CM}} = 0$, mens

$$Y_{\text{CM}} = \frac{\int_{y=0}^{y=8} y \cdot \pi x^2 dy}{\int_{y=0}^{y=8} \pi x^2 dy} = \frac{\int_0^8 y \cdot \left(y^{\frac{2}{3}}\right)^2 dy}{\int_0^8 \left(y^{\frac{2}{3}}\right)^2 dy} = \frac{\int_0^8 y^{\frac{7}{3}} dy}{\int_0^8 y^{\frac{4}{3}} dy} = \frac{\left[\frac{3}{10} y^{\frac{10}{3}}\right]_0^8}{\left[\frac{3}{7} y^{\frac{7}{3}}\right]_0^8}$$

$$= \frac{\frac{3}{10}\left(8^{\frac{10}{3}} - 0\right)}{\frac{3}{7}\left(8^{\frac{7}{3}} - 0\right)} = \frac{7 \cdot \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{10}}{10 \cdot \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^7} = \frac{7 \cdot 2^{10}}{10 \cdot 2^7} = \frac{7 \cdot 8}{10} = \underline{\underline{\frac{28}{5}}}$$

b)



Grafen til funksjonen

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{når} \quad 0 \le x < 4 \\ 4 - \frac{1}{2}x & \text{når} \quad 4 \le x \le 8 \end{cases}$$

er illustrert til venstre.

Det er åpenbart at ved rotasjon om *x*-aksen blir $Y_{\text{CM}} = 0$. Videre blir

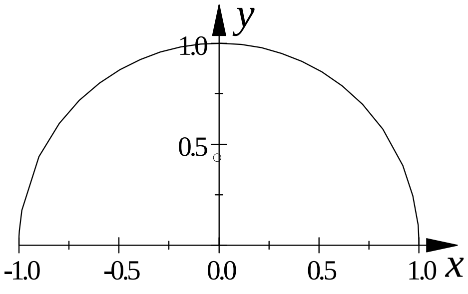
$$X_{\text{CM}} = \frac{\int_{x=0}^{x=8} x \cdot \pi y^2 dx}{\int_{x=0}^{x=8} \pi y^2 dx} = \frac{\int_{x=0}^{x=4} x \cdot \left(\sqrt{x}\right)^2 dx + \int_4^8 x \cdot \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2 dx}{\int_{x=0}^{x=4} \sqrt{x}^2 dx + \int_4^8 \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2 dx}$$

$$= \frac{\int_0^4 x^2 dx + \int_4^8 \left(16x - 4x^2 + \frac{1}{4}x^3\right) dx}{\int_0^4 x dx + \int_4^8 \left(16 - 4x + \frac{1}{4}x^2\right) dx} = \frac{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4 + \left[8x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{16}x^4\right]_4^8}{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 + \left[16x - 2x^2 + \frac{1}{12}x^3\right]_4^8}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(4^3 - 0\right) + \left(8 \cdot 8^2 - \frac{4}{3} \cdot 8^3 + \frac{1}{16} \cdot 8^4\right) - \left(8 \cdot 4^2 - \frac{4}{3} \cdot 4^3 + \frac{1}{16} \cdot 4^4\right)}{\frac{1}{2}\left(4^2 - 0\right) + \left(16 \cdot 8 - 2 \cdot 8^2 + \frac{1}{12} \cdot 8^3\right) - \left(16 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 + \frac{1}{12} \cdot 4^3\right)} = \frac{48}{\frac{40}{3}} = \underline{\underline{\frac{18}{5}}}$$

Oppgave 2

a)



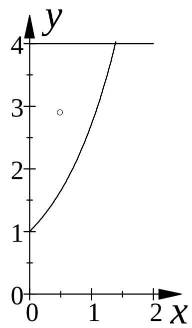
Til venstre ser du halvsirkelen tegnet med $R = 1$. Massesenteret er også tegnet inn som en liten sirkel. Det er åpenbart at $X_{\text{CM}} = 0$. For å finne Y_{CM}, legger jeg stripene vertikalt på vanlig måte, og benytter at arealet av en halvsirkel er $A = \frac{1}{2} \cdot \pi R^2$. Da blir

$$Y_{\text{CM}} = \frac{1}{A}\int_{x=-R}^{x=+R} \tfrac{1}{2}\left(y^2 - 0^2\right)dx = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi R^2}\cdot\tfrac{1}{2}\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}^{\,2} - 0\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \frac{1}{\pi R^2}\left[R^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R}$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\left(\left(R^3 - \tfrac{1}{3}R^3\right) - \left(R^2\cdot(-R) - \tfrac{1}{3}(-R)^3\right)\right) = \frac{1}{\pi R^2}\cdot\frac{4}{3}R^3 = \underline{\underline{\frac{4R}{3\pi}}}$$

b)



Grafen til funksjonen $y = f(x) = e^x$ er illustrert til venstre sammen med linja $y = 4$. Grafene skjærer hverandre når

$$e^x = 4 \quad\Leftrightarrow\quad x = \ln 4 .$$

Beregner først arealet:

$$A = \int_0^{\ln x}\left(4 - e^x\right)dx = \left[4x - e^x\right]_0^{\ln 4} = 4\ln 4 - e^{\ln 4} - 0 + e^0$$

$$= 4\ln 4 - 4 + 1 = \underline{4\ln 4 - 3}$$

Her er det enklest å beregne X_{CM} ved å legge stripene vertikalt på vanlig måte. Da blir

$$X_{\text{CM}} = \frac{1}{A}\int_0^{\ln 4} x\left(4 - e^x\right)dx = \frac{1}{4\ln 4 - 3}\left[2x^2 - (x-1)e^x\right]_0^{\ln 4}$$

$$= \frac{1}{4\ln 4 - 3}\left(\left(2(\ln 4)^2 - (\ln 4 - 1)e^{\ln 4}\right) - \left(0 - (0-1)e^0\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4\ln 4 - 3}\left(2(\ln 4)^2 - 4\ln 4 + 4 - 1\right) = \underline{\underline{\frac{2(\ln 4)^2 - 4\ln 4 + 3}{4\ln 4 - 3}}} \approx \underline{\underline{0.51}}$$

Under veis har jeg benyttet at

$$\int \overset{u}{x}\,\overset{v'}{e^x}\,dx = xe^x - \int \overset{u'}{1}\cdot\overset{v}{e^x}\,dx = xe^x - e^x + C = \underline{(x-1)e^x + C}\,.$$

For å finne Y_{CM}, er det kanskje lettest å legge stripene horisontalt. Da får vi at

$$y = e^x \quad\Leftrightarrow\quad x = \ln y\,,$$

slik at

$$Y_{\text{CM}} = \frac{1}{A}\int_{y=1}^{y=4} y\left(x - 0\right)dy = \frac{1}{4\ln 4 - 3}\int_1^4 y\ln y\,dy = \frac{1}{4\ln 4 - 3}\left[\tfrac{1}{2}y^2\ln y - \tfrac{1}{4}y^2\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{4\ln 4 - 3}\left(\left(\tfrac{1}{2}\cdot 4^2\ln 4 - \tfrac{1}{4}\cdot 4^2\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cdot 1^2\ln 1 - \tfrac{1}{4}\cdot 1^2\right)\right)$$

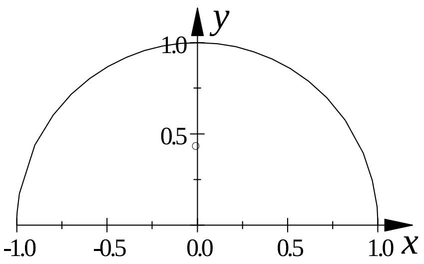
$$= \frac{1}{4\ln 4 - 3}\left(8\ln 4 - 4 - 0 + \tfrac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{8\ln 4 - \frac{15}{4}}{4\ln 4 - 3}}} \approx \underline{\underline{2.88}}$$

Under veis har jeg benyttet at

$$\int \overset{u'}{y}\cdot\overset{v}{\ln y}\,dy = \overset{u}{\tfrac{1}{2}y^2}\cdot\overset{v}{\ln y} - \int \overset{u}{\tfrac{1}{2}y^2}\cdot\overset{v'}{\tfrac{1}{y}}\,dy = \tfrac{1}{2}y^2\ln y - \tfrac{1}{2}\int y\,dy = \underline{\tfrac{1}{2}y^2\ln y - \tfrac{1}{4}y^2 + C}\,.$$

På figuren er massesenteret tegnet inn som en liten ring.

Oppgave 3



Til venstre ser du halvsirkelen tegnet med $R = 1$. Massesenteret er også tegnet inn som en liten sirkel. Det er åpenbart at $X_{\text{CM}} = 0$. For å finne Y_{CM}, benytter jeg at når $y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ der $u = R^2 - x^2$, blir

$$y' = \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{u}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

slik at

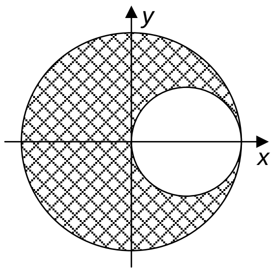
$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{(R^2 - x^2) + x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \underline{\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx}$$

Videre benytter jeg at lengden av halvsirkel-grafen blir $L = \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi R = \underline{\pi R}$. Da blir

$$Y_{\text{CM}} = \frac{1}{L}\int_{x=-R}^{x=+R} y\, ds = \frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} dx = \frac{1}{\pi}\big(R - (-R)\big) = \underline{\underline{\frac{2R}{\pi}}}.$$

Oppgave 4



Plasserer skiva i et koordinatsystem slik figuren viser. Det er åpenbart at massesenteret må ligge på *x*-aksen slik at $Y_{\text{CM}} = 0$. Lar skiva ha tetthet ρ. Da har den store skiva masse

$$M = \rho \cdot \pi R^2$$

og massesenter i $(0,0)$.

Den bortklipte skiva har masse

$$m = \rho \cdot \pi r^2 = \rho \cdot \pi \left(\tfrac{1}{2}R\right)^2 = \tfrac{1}{4}\rho\pi R^2$$

og massesenter i $(r,0) = \left(\tfrac{1}{2}R, 0\right)$.

Da blir

$$X_{\text{CM}} = \frac{1}{M - m}\left(M \cdot 0 - m \cdot \tfrac{1}{2}R\right) = \frac{0 - \frac{1}{4}\rho\pi R^2 \cdot \frac{1}{2}R}{\rho\pi R - \frac{1}{4}\rho\pi R^2} = \frac{-\frac{1}{8}\rho\pi R^3}{\frac{3}{4}\rho\pi R^2} = \underline{\underline{-\tfrac{1}{6}R}}.$$