5. Bevegelsesmengde.

Hittil har vi forutsatt at våre legemer kan oppfattes som *partikler*. Stort sett har vi behandlet disse partiklene som isolerte legemer som påvirkes av krefter. Nå er det på tide å se nærmere på disse forutsetningene.

5.1. Bevegelsesmengde og impuls.

Hittil har vi konsentrert oss om atferden til ett legeme. Vi har betraktet slike legemer som *partikler*. Nå er det på tide å ta hensyn til at legemer har en utstrekning. Vi skal gå ut fra at virkelige legemer er bygd opp av partikler som henger sammen. Men først må vi innføre et par nye begreper, og vise hva disse kan brukes til.

Det første nye begrepet er ***bevegelsesmengde***, som defineres slik:

Et legeme som har masse m og hastighet $\mathbf{v}$ har en ***bevegelsesmengde***

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\,.$$

Legg merke til at bevegelsesmengde er en *vektor*.

Av definisjonen ser du at et legeme med liten masse og stor fart kan ha samme bevegelsesmengde som et legeme med stor masse og liten fart. Erfaringer fra dagliglivet går ut på at det kan være like vanskelig å kaste en lett ball med stor fart som å kaste en tung stein med liten fart. Det er derfor naturlig å anta at det er sammenheng mellom endring i bevegelsesmengde og den kraften som gir en slik endring. Det var bl.a. slike observasjoner som i sin tid fikk Newton til å utforme den loven som vi i dag kaller Newtons 2. lov.

Dersom vi deriverer definisjonen $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ med hensyn på tiden t, og benytter at massen m er konstant, får vi

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

der vi bruker Newtons 2. lov i den siste overgangen.

Da Newton i sin tid introduserte sin 2. lov, benyttet han en formulering som med dagens symboler faktisk er

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\,.$$

Denne formuleringen viser seg å gjelde også innenfor relativitetsteorien, mens $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ ikke gjør det. Det er derfor grunn til å si at Newtons 2. lov egentlig burde vært

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\,.$$

Det neste begrepet vi skal definere, er ***kraftstøt*** eller ***impuls***. En foreløpig definisjon er slik:

Dersom en konstant kraft $\mathbf{F}$ virker i en tid t, er ***impulsen***

$$\mathbf{J} = \mathbf{F} \cdot t$$

Merk at impuls er en vektor.

Dersom kraften ikke er konstant, kan vi "berge" definisjonen med å la **F** være en gjennomsnittskraft. Vi kan også lage en mer generell definisjon ved å dele opp tiden t i mange tidsintervaller som er så små at vi kan anta at kraften er konstant innenfor et intervall. Da kan vi finne samlet impuls ved å summere bidragene fra alle intervallene. Som vanlig erstatter vi en slik summasjon med en integrasjon, og får:

Når en kraft $\mathbf{F}(t)$ virker fra et tidspunkt t_1 til et senere tidspunkt t_2, gir kraften opphav til en ***impuls*** $\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,dt$.

Nå skal vi sette opp en enkel sammenheng mellom kraftstøt og impuls. Vi tar utgangspunkt i definisjonen av impuls, og setter inn at $\mathbf{F} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dt}$. Da får vi

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{p}}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = [\mathbf{p}]_{t_1}^{t_2} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 .$$

Sammenhengen ovenfor kalles gjerne ***impulsloven***:

Den samlede impuls som virker på et legeme i et tidsintervall, er lik endringen i bevegelsesmengde i det samme tidsintervallet.

Eksempel 5.1.1: En person med masse $m = 80\,\mathrm{kg}$ sitter i en bil som kjører med fart $v_1 = 20\,\mathrm{m/s}$. Bilen kolliderer og stopper.

a) Beregn endringen i personens bevegelsesmengde.
b) Hvor stor gjennomsnittskraft utsettes personen for når vi antar at det tar 0.4 sekunder å endre farten fra 20 m/s til full stans?

Løsning: Her er det åpenbart rettlinjet bevegelse. Vi legger en akse med positiv retning i den opprinnelige fartsretningen, og får:

a) Endringen i bevegelsesmengde er

$$p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1 = 80\,\mathrm{kg}\cdot 0\,\mathrm{m/s} - 80\,\mathrm{kg}\cdot 20\,\mathrm{m/s} = \underline{\underline{-1600\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}}}.$$

Minustegnet kommer av at bevegelsesmengden har retning *mot* den opprinnelige fartsretningen.

b) Benytter at impuls er gjennomsnittskraft ganger lengden av tidsintervallet. Da gir impulsloven:

$$J = p_2 - p_1 \quad\Leftrightarrow\quad \overline{F}\cdot\Delta t = p_2 - p_1 \quad\Leftrightarrow\quad \overline{F} = \frac{p_2 - p_1}{\Delta t} = \frac{-1600\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}}{0.4\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{-4000\,\mathrm{N}}}.$$

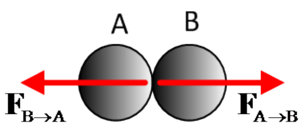
Minustegnet viser at kraften virker mot fartsretningen. Til sammenlikning kan det nevnes at en person med masse 80 kg har en tyngde på noe under 800 N. Den gjennomsnittlige kollisjonskraften er mer enn 5 ganger så stor som tyngden, eller mer enn 5*G*. Da er det ikke rart at personen får store skader under en slik kollisjon.

Oppgaver: 5.1.1.

5.2. Kollisjoner mellom to legemer.

5.2.1. Bevaring av bevegelsesmengde.

Vi skal nå utlede en viktig bevaringslov. I første omgang skal vi utlede den for to legemer som kolliderer. Men om ikke lenge skal vi vise at loven er atskillig mer generell.



Når to legemer (som vi skal kalle A og B) kolliderer, vil det virke krefter mellom dem under kollisjonen. La oss kalle den kraften som virker fra B mot A for $\mathbf{F}_{B\to A}$. Denne kraften gir et kraftstøt

$$\mathbf{J}_A = \int \mathbf{F}_{B\to A}\,dt \text{ på A.}$$

Dersom ingen andre krefter virker på legeme A under kollisjonen, eller dersom vektorsummen av andre krefter er lik null, vil dette kraftstøtet gi legeme A en endring i bevegelsesmengde $\Delta\mathbf{p}_A = \mathbf{J}_A$.

På tilsvarende måte virker det en kraft $\mathbf{F}_{A\to B}$ fra A til B, som gir et kraftstøt

$$\mathbf{J}_B = \int \mathbf{F}_{A\to B}\,dt$$

på B. Dette kraftstøtet gir B en endring i bevegelsesmengde $\Delta\mathbf{p}_B = \mathbf{J}_B$.

Men ifølge Newtons 3. lov er $\mathbf{F}_{B\to A} = -\mathbf{F}_{A\to B}$. Da er også

$$\mathbf{J}_A = -\mathbf{J}_B \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{J}_A + \mathbf{J}_B = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\mathbf{p}_A + \Delta\mathbf{p}_B = \mathbf{0}.$$

Men hva er det egentlig som står her? $\Delta\mathbf{p}_A$ og $\Delta\mathbf{p}_B$ er jo endringene i bevegelsesmengde til henholdsvis A og B. Da er $\Delta\mathbf{p}_A + \Delta\mathbf{p}_B$ den samlede endringen i bevegelsesmengde for de to legemene. Likningen sier altså at ***endringen av legemenes samlede bevegelsesmengde er lik null***. Eller annerledes formulert:

Når to legemer kolliderer, er legemenes samlede bevegelsesmengde bevart dersom vi kan se bort fra kraftstøt fra ytre krefter.

Denne formuleringen trenger et par kommentarer:

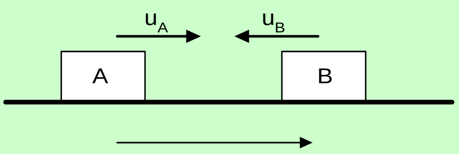
- Med *ytre krefter* menes alle krefter unntatt kreftene $\mathbf{F}_{A\to B}$ og $\mathbf{F}_{B\to A}$.
- Vi kan se bort fra kraftstøtet til ytre krefter dersom vektorsummen av dem er lik null, eller dersom de virker over så kort tidsrom at kraftstøtet fra dem kan neglisjeres.

Eksempel 5.2.1: To små vogner glir mot hverandre på en horisontal, friksjonsløs luftputeskinne. Den ene vogna har masse $m_A = 0.20\,\text{kg}$ og fart $u_A = 2.0\,\text{m/s}$. Den andre vogna har masse $m_B = 0.50\,\text{kg}$ og fart $u_B = 1.50\,\text{m/s}$ i motsatt retning av den første vogna. De to vognene kolliderer, og hekter seg sammen.

a) Hvor stor fart får vognene etter kollisjonen?

b) Undersøk om den samlede kinetiske energien er bevart.

Løsning:



Lager figuren til venstre, der jeg velger positiv retning slik at vogn A har fart i positiv retning før sammenstøtet. Siden det ikke er friksjon, og vognenes tyngde oppveies av en motsatt like stor kraft fra skinnen, er vognenes samlede bevegelsesmengde bevart under støtet.

a) Etter sammenstøtet opptrer de to vognene som ett legeme med masse $m_A + m_B$. Kaller vognenes felles hastighet for **v**. Da er:

$$m_A \mathbf{u}_A + m_B \mathbf{u}_B = (m_A + m_B)\mathbf{v}\,.$$

Siden all bevegelse foregår langs ei rett linje, kan vi bruke fortegn til å ta vare på retningene og sløyfer vektor-symbolene. Da er $u_A = 2.0\,\mathrm{m/s}$ mens $u_B = -1.5\,\mathrm{m/s}$. Vi får:

$$m_A u_A + m_B u_B = (m_A + m_B)v$$

$$v = \frac{m_A u_A + m_B u_B}{m_A + m_B} = \frac{0.20\,\mathrm{kg}\cdot 2.0\,\mathrm{m/s} + 0.50\,\mathrm{kg}\cdot(-1.50\,\mathrm{m/s})}{(0.20+0.50)\,\mathrm{kg}} = \underline{\underline{-0.5\,\mathrm{m/s}}}$$

Minustegnet angir at de sammenhektede vognene beveger seg i negativ retning.

b) Før kollisjonen var vognenes samlede kinetiske energi

$$W_{\text{før}} = \tfrac{1}{2} m_A u_A^{\,2} + \tfrac{1}{2} m_B u_B^{\,2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot(0.20\,\mathrm{kg})\cdot(2.0\,\mathrm{m/s})^2 + \tfrac{1}{2}\cdot(0.50\,\mathrm{kg})\cdot(-1.50\,\mathrm{m/s})^2 = \underline{0.9625\,\mathrm{J}}$$

Etter kollisjonen var vognene hektet samme til ett legeme:

$$W_{\text{etter}} = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 = \tfrac{1}{2}(0.20\,\mathrm{kg} + 0.50\,\mathrm{kg})\cdot(-0.50\,\mathrm{m/s})^2 = \underline{0.0875\,\mathrm{J}}\,.$$

Vi ser at den samlede kinetiske energien er kraftig redusert.

Eksemplet over viser at den kinetiske energien *ikke* er bevart ved dette støtet. Mye av den kinetiske energien går over til varme idet de to vognene støter sammen. Dette er en helt vanlig situasjon ved slike støt. Vi merker oss altså at:

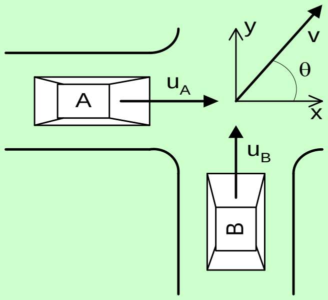
Når to legemer støter sammen, er bevegelsesmengden bevart.
Den kinetiske energien er som regel ikke bevart.

Vi må ta et eksempel til, der vi ser på et støt i to dimensjoner. Da må vi benytte vektor-regning.

Eksempel 5.2.2: Bil A har masse $m_A = 1100\,\mathrm{kg}$, og kjører østover. Bil B har masse $m_B = 1400\,\mathrm{kg}$, og kjører nordover. De kolliderer i et veikryss på isglatt underlag. Umiddelbart før kollisjonen har A fart med størrelse $u_A = 12\,\mathrm{m/s}$, mens B har fart med størrelse $u_B = 15\,\mathrm{m/s}$. Bilene utgjør et sammenfiltret vrak etter kollisjonen.

a) Finn hastigheten (størrelse og retning) til vraket like etter kollisjonen.
b) Undersøk om den kinetiske energien er bevart.

Løsning:



a) Legger et koordinatsystem med *x*-akse østover og *y*-akse nordover. Kaller vrakets hastighet etter kollisjonen for **v**. Vi antar at veibanen er så glatt at vi kan se bort fra friksjonskrefter under kollisjonen. Bevaring av bevegelsesmengde gir

$$m_A \mathbf{u}_A + m_B \mathbf{u}_B = (m_A + m_B)\mathbf{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{1}{m_A + m_B}(m_A \mathbf{u}_A + m_B \mathbf{u}_B)$$

På komponentform blir dette:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{(1100+1400)\,\mathrm{kg}}\left(1100\,\mathrm{kg}\cdot\begin{bmatrix}12\\0\end{bmatrix}\mathrm{m/s} + 1400\,\mathrm{kg}\cdot\begin{bmatrix}0\\15\end{bmatrix}\mathrm{m/s}\right)$$

$$= \frac{1}{2500}\left(\begin{bmatrix}13200\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\21000\end{bmatrix}\right)\mathrm{m/s} = \underline{\begin{bmatrix}5.28\\8.40\end{bmatrix}\mathrm{m/s}}$$

Størrelsen av **v** blir

$$v = \sqrt{(5.28\,\mathrm{m/s})^2 + (8.40\,\mathrm{m/s})^2} = \underline{\underline{9.92\,\mathrm{m/s}}}\,.$$

Vinkelen θ med *x*-aksen er

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{8.40}{5.28} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \underline{\underline{58^\circ}}\,.$$

b) Bilenes samlede kinetiske energi før kollisjonen var

$$W_{\text{før}} = \tfrac{1}{2} m_A u_A{}^2 + \tfrac{1}{2} m_B u_B{}^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 1100\,\mathrm{kg}\cdot(12\,\mathrm{m/s})^2 + \tfrac{1}{2}\cdot 1400\,\mathrm{kg}\cdot(15\,\mathrm{m/s})^2 = 236\,700\,\mathrm{J}\,.$$

Bilenes samlede kinetiske energi etter kollisjonen er

$$W_{\text{etter}} = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 = \tfrac{1}{2}\cdot(1100+1400)\,\mathrm{kg}\cdot(9.92\,\mathrm{m/s})^2 = 123\,000\,\mathrm{J}\,.$$

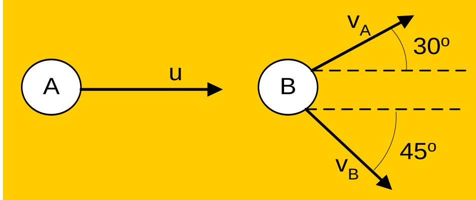
Det er altså ”forsvunnet” $236\,700\,\mathrm{J} - 123\,000\,\mathrm{J} = 113\,700\,\mathrm{J}$. Denne energien er gått med til å forvandle to fine biler til ett sammenfiltret vrak.

Oppgaver: 5.2.1, 5.2.2.

Selv om vi kjenner massene til de to legemene og deres hastigheter før kollisjonen, er vi normalt ikke i stand til å finne deres hastigheter etter kollisjonen. Det skyldes at bevaring av bevegelsesmengde kun gir oss *en* likning, mens vi vanligvis har *to* ukjente hastigheter etter kollisjonen. Vi trenger da tilleggsopplysninger. Eksemplene ovenfor viste et vanlig spesialtilfelle, der begge legemene har samme hastighet etter støtet. Slike støt kalles ***fullstendig uelastiske***.

Et annet spesialtilfelle er ***fullstendig elastiske støt***, der også den kinetiske energien er bevart. Vi skal snart se nærmere på dette spesialtilfellet. Men først skal vi ta et eksempel til, der vi har tilleggsopplysninger som hjelper oss til å løse problemet.

Eksempel 5.2.3:



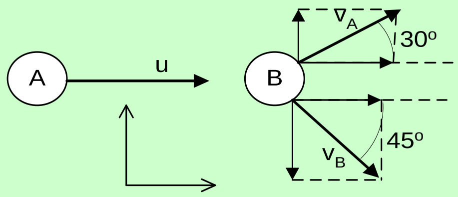
En puck B ligger i ro på en isflate. En annen puck A glir mot B med fart $u = 3.0\,\mathrm{m/s}$. Begge puckene har samme masse *m*. Etter at A har truffet B, får A farten v_A og B får farten v_B. Sporene i isen viser at puckene glir i de retningene som figuren til venstre angir. Finn hvor stor fart hver puck fikk etter støtet.

Løsning: I dette tilfellet kan vi gå ut fra at vektorsummen av de ytre kreftene er lik null, slik at puckenes samlede bevegelsesmengde er bevart. På vektorform gir dette:

$$m_\mathrm{A}\mathbf{u} + m_\mathrm{B}\cdot\mathbf{0} = m_\mathrm{A}\mathbf{v}_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{B}\,.$$

Siden $m_\mathrm{A} = m_\mathrm{B} = m$, kan dette forenkles til

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_\mathrm{A} + \mathbf{v}_\mathrm{B}\,.$$



Vi definerer positive retninger som vist på figuren til venstre. Vektorene dekomponeres, og fortegnene tilpasses slik figuren viser. Vi får

$$\begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_\mathrm{A}\cos 30^\circ \\ v_\mathrm{A}\sin 30^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_\mathrm{B}\cos 45^\circ \\ -v_\mathrm{B}\sin 45^\circ \end{bmatrix}$$

Dette gir de to likninger som vi kan finne v_A og v_B av:

$$u = v_\mathrm{A}\cos 30^\circ + v_\mathrm{B}\cos 45^\circ \quad\Leftrightarrow\quad u = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,v_\mathrm{A} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,v_\mathrm{B}$$

$$0 = v_\mathrm{A}\sin 30^\circ - v_\mathrm{B}\sin 45^\circ \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}v_\mathrm{A} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,v_\mathrm{B} = 0$$

Vi starter med å legge sammen likningene, og får

$$u = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,v_\mathrm{A} + \tfrac{1}{2}v_\mathrm{A} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)v_\mathrm{A} \quad\Leftrightarrow\quad v_\mathrm{A} = \frac{2u}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\cdot 3.0\,\mathrm{m/s}}{\sqrt{3}+1} \approx \underline{\underline{2.2\,\mathrm{m/s}}}$$

Av den nederste likningen får vi nå

$$v_\mathrm{B} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}v_\mathrm{A} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2.2\,\mathrm{m/s} \approx \underline{\underline{1.6\,\mathrm{m/s}}}\,.$$

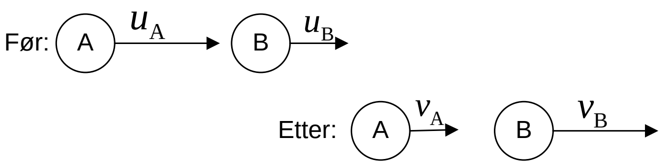
5.2.2. Fullstendig elastiske støt.

Vi har allerede vist at vanligvis er ikke den kinetiske energien bevart ved en kollisjon. Men det fins situasjoner der vi kan anta at den kinetiske energien er bevart. Da sier vi at vi har et ***fullstendig elastisk støt***.

Bevaring av kinetisk energi gir oss *en* ekstra likning. Dersom vi har et *rettlinjet* støt, d.v.s. et støt der begge legemene hele tiden beveger seg langs samme rette linje, er denne ekstra likningen sammen med bevaring av bevegelsesmengde tilstrekkelig til å finne sluttfarten til begge legemene. Regningene kan imidlertid bli nokså kronglete. Heldigvis kan de forenkles ved å benytte at:

> Dersom vi har et fullstendig elastisk rettlinjet støt mellom to legemer, vil den relative farten mellom legemene bevare sin størrelse, men vil skifte retning.

Hva er det egentlig som ligger i denne setningen? Se på figuren nedenfor:



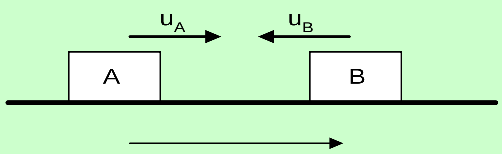
To legemer A og B kolliderer. Før støtet hadde A en fart u_A, og B hadde fart u_B. Sett fra A sitt synspunkt kommer B mot A med en *relativ fart* $u_B - u_A$. Etter støtet har A fått en fart v_A, mens B har fått farten v_B. Sett fra A sitt synspunkt beveger B seg nå bort fra A med en relativ fart $v_B - v_A$. Setningen i ramma ovenfor sier at etter kollisjonen beveger B seg bort fra A med like stor fart som B hadde mot A før kollisjonen, og i motsatt retning. Med symboler:

$$v_B - v_A = -(u_B - u_A).$$

Jeg har flyttet beviset for denne påstanden til et tillegg, men jeg vil sterkt anbefale at du går gjennom beviset likevel.

Eksempel 5.2.4: Vi vender tilbake til de to små vognene som glir mot hverandre på en horisontal, friksjonsløs luftputeskinne. Den ene vogna har masse $m_A = 0.20\,\mathrm{kg}$ og fart $u_A = 2.0\,\mathrm{m/s}$. Den andre vogna har masse $m_B = 0.50\,\mathrm{kg}$ og fart $u_B = -1.50\,\mathrm{m/s}$, der minustegnet angir at B beveger seg i negativ retning. De to vognene kolliderer, men en elastisk fjær sørger for at vognene spretter fra hverandre i en fullstendig elastisk kollisjon. Hvor stor fart får vognene etter kollisjonen?

Løsning:



Lager figuren til venstre, der jeg velger positiv retning slik at vogn A har fart i positiv retning før sammenstøtet. Siden det ikke er friksjon, og vognenes tyngde oppveies av en motsatt like stor kraft fra skinnen, er vognenes samlede bevegelses-mengde bevart under støtet.

Bevaring av bevegelsesmengde gir nå

$$m_A u_A + m_B u_B = m_A v_A + m_B v_B.$$

Setter inn kjente opplysninger, og får

$$0.20\,\mathrm{kg}\cdot 2.0\,\mathrm{m/s} + 0.50\,\mathrm{kg}\cdot(-1.50\,\mathrm{m/s}) = 0.20\,\mathrm{kg}\cdot v_A + 0.50\,\mathrm{kg}\cdot v_B$$

$$-0.35\,\mathrm{m/s} = 0.20 v_A + 0.50 v_B$$

Siden all bevegelse foregår langs en rett linje, kan vi benytte at relativfarten skifter fortegn:

$$v_B - v_A = -(u_B - u_A) \quad \Leftrightarrow \quad v_B - v_A = -(-1.50\,\mathrm{m/s} - 2.0\,\mathrm{m/s}) = 3.5\,\mathrm{m/s}.$$

Den siste likningen innebærer at vognene går *fra* hverandre med en fart på $3.5\,\mathrm{m/s}$ etter kollisjonen. Dette stemmer med at vognene kom *mot* hverandre med en fart på $3.5\,\mathrm{m/s}$ før kollisjonen.

Vi har nå to likninger med to ukjente:

$$0.20 v_A + 0.50 v_B = -0.35\,\mathrm{m/s}.$$

$$v_B - v_A = 3.5\,\mathrm{m/s} \quad \Leftrightarrow \quad v_B = 3.5\,\mathrm{m/s} + v_A.$$

Vi setter denne sammenhengen inn i den første likningen:

$$0.20v_A + 0.50\left(3.5\,\text{m/s} + v_A\right) = -0.35\,\text{m/s}$$

$$0.70v_A = -0.35\,\text{m/s} - 1.75\,\text{m/s} = -2.10\,\text{m/s} \quad \Leftrightarrow \quad v_A = \frac{-2.10\,\text{m/s}}{0.70} = \underline{\underline{-3.0\,\text{m/s}}}$$

Da blir

$$v_B = 3.5\,\text{m/s} + v_A = 3.5\,\text{m/s} + \left(-3.0\,\text{m/s}\right) = \underline{\underline{0.5\,\text{m/s}}}\,.$$

Vi ser at den lette vogn A spretter tilbake med forholdsvis stor (negativ) fart, mens den tyngre vogn B spretter tilbake med mye lavere fart. Dette virker rimelig.

Oppgaver: 5.2.3.

Når to legemer kolliderer med hverandre slik som i eksemplet ovenfor, er det ikke vanlig at vi kan anta at kollisjonen er fullstendig elastisk. Men vi har mange andre "kollisjoner" som er fullstendig elastiske. Når to elektrisk ladde partikler frastøter hverandre, har vi et fullstendig elastisk støt. Det samme er tilfelle når to himmellegemer tiltrekker hverandre på grunn av gravitasjon. Selv om regningene da blir mer kompliserte enn ved et rettlinjet støt, kan de prinsippene vi har gått gjennom kan anvendes i mange forskjellige situasjoner utenom det vi til daglig tenker på som "kollisjoner".

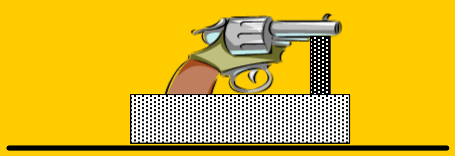
5.2.3. Bruk av bevaringslovene.

Vi har nå sett på to viktige bevaringslover: Bevaring av energi, og bevaring av bevegelses-mengde. Men vi har også sett at den *mekaniske* energien er ikke alltid bevart. Dessuten må visse betingelser må være oppfylt for at bevegelsesmengden skal være bevart. Det kan være nyttig å rekapitulere når vi kan bruke hver av disse bevaringslovene.

- Dersom ingen andre ytre krefter enn tyngde og fjærkraft utfører arbeid, er den mekaniske energien bevart.
- Dersom vi kan beregne det arbeidet som andre ytre krefter utfører (for eksempel friksjonsarbeid), kan vi også sette opp en likning for mekanisk energi.
- Når to eller flere legemer kolliderer, eller når et legeme eksploderer i to eller flere deler, er bevegelsesmengden bevart forutsatt at vi kan neglisjere kraftstøt fra ytre krefter under kollisjonen / eksplosjonen.

Vi skal illustrere disse prinsippene med eksemplene nedenfor, der vi ønsker å bestemme farten til ei pistolkule idet den skytes ut.

Eksempel 5.2.5:



Vi monterer pistolen på ei vogn som kan gli uten friksjon på en luftputebane. Vogn med pistol har massen 5.00 kg, mens pistolkula har massen 8.0 gram. Vi fyrer av pistolen uten å påvirke den med ytre krefter. Da glir vogn med pistol 1.00 m bakover med konstant fart på 0.80 sekunder. Hvor stor fart hadde pistolkula?

Løsning: Idet skuddet går av, kan vi se bort fra kraftstøt fra ytre krefter. Da er bevegelsesmengden bevart. Vi vet massen til vogn med pistol er $m_\mathrm{v} = 5.00\,\mathrm{kg}$, og massen til kula er $m_\mathrm{k} = 0.008\,\mathrm{kg}$. Farten til vogn med pistol er v_v, og farten til kula er v_k. Da blir

$$m_\mathrm{v} v_\mathrm{v} + m_\mathrm{k} v_\mathrm{k} = 0$$

fordi hele systemet var i ro før skuddet gikk av, slik at bevegelsesmengden da var lik null. Siden vogn med pistol glir bakover, blir

$$v_\mathrm{v} = \frac{-1.00\,\mathrm{m}}{0.80\,\mathrm{s}} = -1.25\,\mathrm{m/s}\,.$$

Nå kan vi finne kulas fart:

$$m_\mathrm{v} v_\mathrm{v} + m_\mathrm{k} v_\mathrm{k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_\mathrm{k} = -\frac{m_\mathrm{v}}{m_\mathrm{k}} v_\mathrm{v} = -\frac{5.00\,\mathrm{kg}}{0.008\,\mathrm{kg}} \cdot (-1.25\,\mathrm{m/s}) = \underline{\underline{780\,\mathrm{m/s}}}\,.$$

Eksempel 5.2.6:
Vi har fremdeles pistolen montert på vogna slik som i eksemplet foran, men lar nå vogna gli på ei horisontal bordplate der friksjonstallet mellom vogn og bordplate er $\mu = 0.20$. Vi fyrer av pistolen, og ser at vogn med pistol glir uten å dreie seg 0.40 m bakover før den stopper. Bruk dette eksperimentet til å bestemme kulas fart idet den forlater munningen.

Løsning: På samme måte som i eksemplet foran er bevegelsesmengden bevart idet skuddet går av. Men vi må benytte energi for å finne farten v_v som vogn med pistol får bakover. Når vogna stopper, er all den kinetiske energien som vogna fikk idet skuddet gikk av gått med til å utføre friksjonsarbeid, som er gitt ved

$$W_f = F_f \cdot s = \mu N_v \cdot s = \mu(m_v g) \cdot s\,.$$

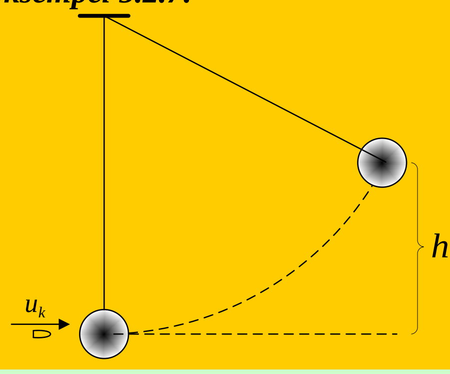
Vi får da at

$$W_f = \tfrac{1}{2} m_v v_v^{\,2} \quad \Leftrightarrow \quad \mu m_v g s = \tfrac{1}{2} m_v v_v^{\,2}$$

$$v_v = \sqrt{2\mu g s} = \sqrt{2 \cdot 0.20 \cdot (9.81\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (0.40\,\mathrm{m})} = \underline{1.25\,\mathrm{m/s}}$$

Siden vogna beveger seg i negativ retning, må vi korrigere fortegnet til v_v. Deretter finner vi farten til kula på samme måte som i eksemplet foran.

Eksempel 5.2.7:



I vårt siste eksperiment skyter vi pistolkula inn i ei pendelkule som har massen $m_p = 2.000\,\mathrm{kg}$. Pistolkula blir sittende fast i pendelkula, som svinger ut inntil den er kommet en høyde $h = 0.500\,\mathrm{m}$ over start-nivået. Bruk dette til å finne farten u_k til pistolkula idet den slo inn i pendelkula.

Løsning: Når pistolkula slår inn i pendelkula er bevegelsesmengden bevart fordi det ikke er noe kraftstøt fra ytre krefter. Den mekaniske energien er *ikke* bevart under dette støtet.

Derimot er den mekaniske energien bevart mens pendelkula (med pistolkula i) svinger ut. Vi benytter denne energibevaringen til å finne farten v_{p+k} til pendelkula like etter at pistolkula traff. Deretter kan vi bruke bevaringen av bevegelsesmengde til å finne farten til pistolkula før treffet.

Energibevaring under utsvinget:

$$\tfrac{1}{2} m_{p+k} v_{p+k}^{\ 2} = m_{p+k} g h \quad \Leftrightarrow \quad v_{p+k} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot (9.81\,\text{m/s}^2)(0.500\,\text{m})} = \underline{3.13\,\text{m/s}}\,.$$

Bevaring av bevegelsesmengde idet pistolkula treffer pendelkula som henger i ro:

$$m_k u_k + 0 = m_{p+k} v_{p+k} \quad \Leftrightarrow \quad u_k = \frac{m_{p+k}}{m_k} v_{p+k} = \frac{2.008\,\text{kg}}{0.008\,\text{kg}} \cdot 3.13\,\text{m/s} = \underline{\underline{786\,\text{m/s}}}\,.$$

Du finner oppgaver under blandede oppgaver.

5.3. Massesenter.

5.3.1. Definisjon.

Hittil har vi begrenset oss til å se på kollisjoner mellom *to* legemer. Vi har faktisk begrenset oss til å se på *partikler*, som er legemer med masse men uten utstrekning. Nå skal vi se på legemer og systemer som består av mange enkeltpartikler. Da trenger vi et svært viktig begrep: ***massesenter***. Det defineres slik:

Vi har et system som består av *n* partikler, der partikkel *i* har masse m_i og posisjon $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Systemets ***massesenter*** har da posisjon

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}\left(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_n\mathbf{r}_n\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i = \frac{1}{M}\sum m_i\mathbf{r}_i$$

I den siste skrivemåten har vi forenklet skrivemåten for summetegnet, og har også benyttet at systemets samlede masse er $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

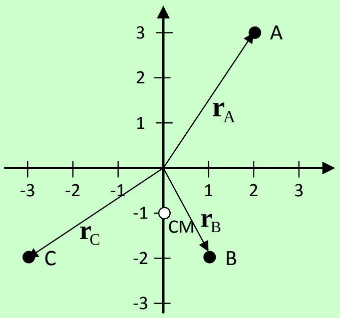
Eksempel 5.3.1: Finn posisjonen til massesenteret til de tre partiklene A, B og C når:

A har masse $m_\text{A} = 2\,\text{kg}$ og befinner seg i posisjon $(2,3)$.

B har masse $m_\text{B} = 5\,\text{kg}$ og befinner seg i posisjon $(1,-2)$.

C har masse $m_\text{C} = 3\,\text{kg}$ og befinner seg i posisjon $(-3,-2)$.

Løsning: Situasjonen er illustrert nedenfor. Posisjonen til massesenteret blir



$$\mathbf{r}_\mathrm{CM} = \frac{1}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B} + m_\mathrm{C}}(m_\mathrm{A}\mathbf{r}_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}\mathbf{r}_\mathrm{B} + m_\mathrm{C}\mathbf{r}_\mathrm{C})$$

$$= \frac{1}{(2+5+3)\,\mathrm{kg}}\left(2\,\mathrm{kg}\cdot\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + 5\,\mathrm{kg}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} + 3\,\mathrm{kg}\cdot\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix}2\cdot 2 + 5\cdot 1 + 3\cdot(-3)\\ 2\cdot 3 + 5\cdot(-2) + 3\cdot(-2)\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}0\\-10\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}}$$

Massesenterets posisjon blir derfor $\underline{\underline{(0,-1)}}$.

Massesenteret (CM) er tegnet inn som en ring på figuren.

Praktisk beregning av massesenter for større legemer fører gjerne til at summetegnene må erstattes av integraltegn. Da får vi at

$$\mathbf{r}_\mathrm{CM} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,dm$$

der dm er massen til et lite masse-element i posisjonen $\mathbf{r}$, og

$$M = \int dm$$

er legemets samlede masse, og vi må integrere over hele legemet. Dette krever matematikk-kunnskaper som jeg ikke forventer at dere har. Men jeg skal nevne et par enkle regler for hvordan vi kan finne massesenteret for noen *homogene* legemer:

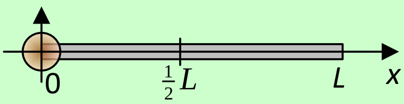
- Dersom legemet har en symmetriakse eller et symmetriplan, vil massesenteret ligge et sted på symmetriaksen eller symmetriplanet. Dette innebærer for eksempel at ei kule har massesenter i kulas sentrum, og at en jamntykk stav har massesenter midt på staven.
- Dersom legemet kan deles opp i mindre deler med kjente masser og kjente masse-sentre, kan legemets massesenter beregnes ut fra formelen

  $$\mathbf{r}_\mathrm{CM} = \frac{1}{\sum m_i}\sum m_i\mathbf{r}_i$$

  der m_i og $\mathbf{r}_i$ er masse og massesenter til del nr. i. Denne regelen er utledet i kap. 5.4.2.

Eksempel 5.3.2: En tynn, homogen stav har lengde $L = 0.80\,\mathrm{m}$ og masse $m_s = 4.0\,\mathrm{kg}$. Ei homogen kule med masse $m_k = 1.0\,\mathrm{kg}$ er festet med sitt sentrum i stavens ene ende. Stav pluss kule oppfattes som ett legeme. Hvor er massesenteret til dette legemet?

Løsning: Vi lager en figur, der vi plasserer staven langs en x-akse med kula i origo:



Kula har sitt massesenter i origo, mens staven har sitt massesenter i $x_s = \frac{1}{2}L$. Legemets massesenter er da i

$$x_\mathrm{CM} = \frac{1}{m_s + m_k}\left(m_s\cdot\tfrac{1}{2}L + m_k\cdot 0\right) = \frac{4.0\,\mathrm{kg}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot 0.80\,\mathrm{m}\right)}{4.0\,\mathrm{kg} + 1.0\,\mathrm{kg}} = \underline{\underline{0.32\,\mathrm{m}}}\,.$$

Oppgaver: 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3.

5.3.2. Egenskaper ved massesenteret.

Dersom de partiklene som inngår i vårt system beveger seg, må også massesenteret bevege seg. Vi tar utgangspunkt i definisjonen av massesenter:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum m_i \mathbf{r}_i \ ,$$

og deriverer denne likningen med hensyn på tiden t. Siden alle massene er konstante, får vi:

$$\frac{d\mathbf{r}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum m_i \mathbf{r}_i\right) = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \mathbf{v}_i \ .$$

Vi oppfatter nå $\frac{d\mathbf{r}_{\mathrm{CM}}}{dt}$ som hastigheten $\mathbf{v}_{\mathrm{CM}}$ til massesenteret. Likningen over blir da

$$\mathbf{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum m_i \mathbf{v}_i \quad \Leftrightarrow \quad M\mathbf{v}_{\mathrm{CM}} = \sum m_i \mathbf{v}_i \ .$$

Men $\sum m_i \mathbf{v}_i$ er jo den samlede bevegelsesmengden til alle partiklene i systemet. Dermed har vi et viktig resultat:

Den samlede bevegelsesmengden til et system er lik systemets masse multiplisert med massesenterets hastighet.

Dette resultatet er mye viktigere enn vi skulle tro ved første øyekast. Det er egentlig dette resultatet som rettferdiggjør at vi kan snakke om ”bevegelsesmengden til et *legeme*”, der legemet består av en mengde enkeltpartikler. Vi erstatter da legemet med *en* partikkel som har samme masse som legemet, og som befinner seg i legemets massesenter. Når vi snakker om ”legemets hastighet”, mener vi egentlig ”hastigheten til legemets massesenter”.

Men vi nøyer oss ikke med dette. Vi deriverer uttrykket

$$\mathbf{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum m_i \mathbf{v}_i$$

med hensyn på tiden t, og får

$$\frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum m_i \mathbf{v}_i\right) = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \ .$$

Men $\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ er jo akselerasjonen $\mathbf{a}_i$ til partikkel nr. i. Videre er det naturlig å oppfatte $\frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{CM}}}{dt}$ som akselerasjonen $\mathbf{a}_{\mathrm{CM}}$ til massesenteret. Da blir likningen ovenfor

$$\mathbf{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum m_i \mathbf{a}_i \ .$$

La oss feste oppmerksomheten på partikkel nr. i. Denne partikkelen påvirkes av krefter. Disse kreftene deles inn i to grupper: *ytre krefter* som har motkraft utenfor systemet og *indre krefter* som skyldes påvirkning fra andre partikler i systemet. Vi kan sette

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i,\text{ytre}} + \mathbf{F}_{i,\text{indre}}$$

der $\mathbf{F}_{i,\text{ytre}}$ og $\mathbf{F}_{i,\text{indre}}$ er vektorsummen av henholdsvis ytre og indre krefter som virker på partikkel nr. *i*. Men ifølge Newtons 2. lov er

$$\mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}_{i,\text{ytre}} + \mathbf{F}_{i,\text{indre}} = m\mathbf{a}_i \,.$$

Da blir

$$\mathbf{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum m_i\mathbf{a}_i = \frac{1}{M}\sum\left(\mathbf{F}_{i,\text{ytre}} + \mathbf{F}_{i,\text{indre}}\right) = \frac{1}{M}\sum\mathbf{F}_{i,\text{ytre}} + \frac{1}{M}\sum\mathbf{F}_{i,\text{indre}} \,.$$

Men siden de indre kreftene har sin motkraft i andre partikler i legemet, må alle de indre kreftene opptre i par som er like store og motsatt rettet ifølge Newtons 3. lov. Da blir

$$\sum\mathbf{F}_{i,\text{indre}} = \mathbf{0} \,.$$

Dermed har vi at

$$\mathbf{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum\mathbf{F}_{i,\text{ytre}} \quad \Leftrightarrow \quad \sum\mathbf{F}_{i,\text{ytre}} = M\cdot\mathbf{a}_{\text{CM}} \,.$$

Også dette er et uhyre viktig resultat. Det sier jo at vi kan betrakte et system av partikler som om det var *en* partikkel med masse *M* som påvirkes av ytre krefter $\sum\mathbf{F}_{i,\text{ytre}}$. Vi kan da bruke Newtons 2. lov til å finne akselerasjonen til massesenteret til dette systemet som om det var *en* partikkel med masse *M*. Massesenterets bane er helt upåvirket av hva som skjer med de enkelte partiklene som systemet består av.

Dersom $\sum\mathbf{F}_{i,\text{ytre}} = \mathbf{0}$, er også $\mathbf{a}_{\text{CM}} = \mathbf{0}$. Da er massesenterets hastighet $\mathbf{v}_{\text{CM}}$ konstant. Men vi har tidligere vist at

$$M\mathbf{v}_{\text{CM}} = \sum m_i\mathbf{v}_i \,.$$

Når $\mathbf{v}_{\text{CM}}$ er konstant, og *M* er konstant, må også $\sum m_i\mathbf{v}_i$ være konstant. Dermed har vi vist at:

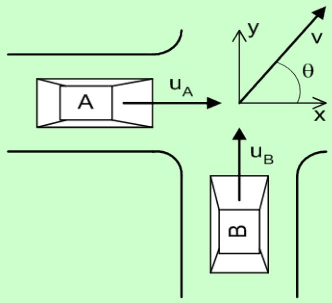
Dersom vektorsummen av de ytre kreftene som virker på et system av partikler er lik null, er systemets samlede bevegelsesmengde bevart.

Dette er en generalisering av den setningen om bevaring av bevegelsesmengde som vi har fra før.

Dette kan vi illustrere med å gå tilbake til de to bilene som kolliderte i eksempel 5.2.2:

Eksempel 5.3.3: Bil A har masse $m_{\text{A}} = 1100\,\text{kg}$, og kjører østover. Bil B har masse $m_{\text{B}} = 1400\,\text{kg}$, og kjører nordover. Umiddelbart før kollisjonen har A fart med størrelse $u_{\text{A}} = 12\,\text{m/s}$, mens B har fart med størrelse $u_{\text{B}} = 15\,\text{m/s}$. Betrakt de to bilene som to deler av ett sammensatt legeme. Vis at farten til massesenteret til dette legemet ikke endres under kollisjonen.

Løsning:



I eksempel 5.2.2 fant vi at massesenterets hastighet etter kollisjonen var

$$\mathbf{v}_{\mathrm{CM}} = \begin{bmatrix} 5.28 \\ 8.40 \end{bmatrix} \mathrm{m/s}.$$

Før kollisjonen er massesenterets hastighet

$$\mathbf{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum m_i \mathbf{v}_i = \frac{1}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\left(m_{\mathrm{A}}\mathbf{u}_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\mathbf{u}_{\mathrm{B}}\right).$$

Vi setter inn de gitte opplysningene, og får

$$\mathbf{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{(1100+1400)\,\mathrm{kg}}\left(1100\,\mathrm{kg}\cdot\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{m/s} + 1400\,\mathrm{kg}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 15 \end{bmatrix}\mathrm{m/s}\right)$$

$$= \frac{1}{2500}\left(\begin{bmatrix} 13200 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 21000 \end{bmatrix}\right)\mathrm{m/s} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 5.28 \\ 8.40 \end{bmatrix}\mathrm{m/s}}}$$

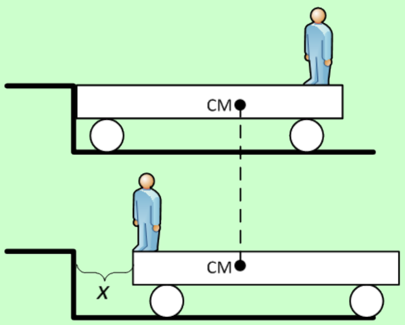
Vi ser at massesenterets hastighet er den samme før og etter kollisjonen. Dette illustrerer at massesenteret fortsetter helt upåvirket av kollisjonen.

Hvis du kaster en gjenstand, er det gjenstandens massesenter som følger en kastebane. Dette gjelder selv om deler av gjenstanden faller av i lufta. Som et ekstremt eksempel kan vi se på en rakett som skytes ut i en prosjektilbane og eksploderer i lufta. Dersom vi kan se bort fra luftmotstand, vil massesenteret til rakettbitene følge samme prosjektilbane etter eksplosjonen som før selv om bitene fyker til alle kanter etter eksplosjonen.

Dersom massesenteret til et system er i ro, og vektorsummen av de ytre kreftene som virker på et systemet er lik null, må massesenteret fortsatt ligge i ro. Det skal vi benytte i eksemplet nedenfor.

Eksempel 5.3.4: Ei vogn med masse $m_{\mathrm{v}} = 120\,\mathrm{kg}$ står på et horisontalt underlag, inn mot en lasterampe. En person med masse $m_{\mathrm{p}} = 80\,\mathrm{kg}$ står på vogna 5.00 m fra kanten av rampen. Personen begynner å gå mot rampen. Da beveger vogna seg fra rampen. Hvor langt fra rampen er personen når han er kommet til enden av vogna? Se figuren nedenfor. Gå ut fra at det ikke er friksjon.

Løsning:



Betrakter vogn pluss person som ett system. Siden det ikke er friksjon, og vogna står på et horisontalt underlag, er vektorsummen av de kreftene som virker på systemet lik null. Da flytter heller ikke systemets massesenter seg. Legger inn en x-akse langs vogna, med origo i kanten av lasterampen. I starten er personens massesenter i posisjon $L = 5.00\,\mathrm{m}$, og vognas massesenter i posisjon x_{v0}. Da er systemets massesenter i posisjon

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{m_{\mathrm{p}}\cdot L + m_{\mathrm{v}}\cdot x_{\mathrm{v0}}}{m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{v}}}.$$

Etter at personen har flyttet seg, og står en strekning x fra origo, vil *vognas* massesenter stå en strekning $x_{\text{v0}} + x$ fra origo. Da er *systemets* massesenter gitt ved

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_{\text{p}} \cdot x + m_{\text{v}} \cdot \left(x_{\text{v0}} + x\right)}{m_{\text{p}} + m_{\text{v}}} .$$

Men massesenteret har ikke flyttet seg. Derfor må disse to uttrykkene være like. Da blir

$$\frac{m_{\text{p}} \cdot L + m_{\text{v}} \cdot x_{\text{v0}}}{m_{\text{p}} + m_{\text{v}}} = \frac{m_{\text{p}} \cdot x + m_{\text{v}} \cdot \left(x_{\text{v0}} + x\right)}{m_{\text{p}} + m_{\text{v}}}$$

$$m_{\text{p}} \cdot L + m_{\text{v}} \cdot x_{\text{v0}} = m_{\text{p}} \cdot x + m_{\text{v}} \cdot x_{\text{v0}} + m_{\text{v}} x$$

$$m_{\text{p}} \cdot L = \left(m_{\text{p}} + m_{\text{v}}\right) x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{m_{\text{p}} \cdot L}{m_{\text{p}} + m_{\text{v}}} = \frac{80\,\text{kg} \cdot 5.00\,\text{m}}{\left(80 + 120\right)\text{kg}} = \underline{\underline{2.00\,\text{m}}}$$

5.3.3. Energiberegninger.

Når vi skal beregne energien til et legeme eller et system som er satt sammen av flere deler, bør vi egentlig beregne energien til hver del for seg og deretter summere bidragene. Heldigvis kan vi forenkle dette arbeidet ved å benytte massesenter.

Vi skal først se på den ***potensielle energien i tyngdefeltet*** til et sammensatt legeme der de enkelte delene har masser m_1, m_2, …, m_n og befinner seg i høyder h_1, h_2, …, h_n over et nullnivå for potensiell energi. Den samlede potensielle energien for hele systemet er da

$$W_{\text{pot}} = \sum m_i g h_i = g \cdot \sum m_i h_i .$$

Men massesenterets høyde over nullnivået er gitt ved

$$h_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum m_i h_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum m_i h_i = M \cdot h_{\text{CM}} .$$

Dermed blir

$$W_{\text{pot}} = g \cdot \sum m_i h_i = g \cdot M \cdot h_{\text{CM}} .$$

Med andre ord: ***Den potensielle energien til et sammensatt system er lik den potensielle energien til en partikkel med masse M i systemets massesenter.***

Så skal vi se på den kinetiske energien til et legeme som er satt sammen av n deler med masser m_1, m_2, …, m_n og hastigheter $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ i forhold til et inertialsystem. Nå skal vi la hver av disse hastighetene være vektorsummen av massesenterets hastighet $\mathbf{v}_{\text{CM}}$ og en hastighet $\mathbf{v}_i\,'$ i forhold til massesenteret:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{v}_i\,' .$$

I tillegget nedenfor viser vi at den samlede kinetiske energien blir

$$W_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2} M \cdot v_{\text{CM}}{}^2 + \sum \tfrac{1}{2} m_i \left(v_i\,'\right)^2 .$$

Med andre ord: ***Den kinetiske energien til et sammensatt legeme er summen av masse-senterets kinetiske energi når vi antar at all masse er samlet i massesenteret, og en kinetisk energi som skyldes partiklenes bevegelse rundt massesenteret.***

Vi får god bruk for begge disse setningene når vi kommer til *rotasjon*. Hvis vi for eksempel ser på et hjul som ruller, blir hjulets kinetiske energi summen av den kinetiske energien som skyldes at hjulets massesenter har en fart og kinetisk energi på grunn av hjulets rotasjon rundt massesenteret. Men før vi går løs på slike problem, må vi ta *rotasjon* fra grunnen av.

**5.4. Tillegg.*

5.4.1. Fullstendig elastisk, rettlinjet støt.

Vi skal nå vise at ved et fullstendig elastisk, rettlinjet støt mellom to partikler vil den relative hastigheten endre retning. Vi benytter da at både bevegelsesmengde og kinetisk energi er bevart. Bevaring av bevegelsesmengde gir

$$m_\mathrm{A}u_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}u_\mathrm{B} = m_\mathrm{A}v_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}v_\mathrm{B} \quad \Leftrightarrow \quad m_\mathrm{A}\left(u_\mathrm{A} - v_\mathrm{A}\right) = -m_\mathrm{B}\left(u_\mathrm{B} - v_\mathrm{B}\right). \qquad (1)$$

Bevaring av kinetisk energi gir

$$\tfrac{1}{2}m_\mathrm{A}u_\mathrm{A}{}^2 + \tfrac{1}{2}m_\mathrm{B}u_\mathrm{B}{}^2 = \tfrac{1}{2}m_\mathrm{A}v_\mathrm{A}{}^2 + \tfrac{1}{2}m_\mathrm{B}v_\mathrm{B}{}^2 \quad \Leftrightarrow \quad m_\mathrm{A}\left(u_\mathrm{A}{}^2 - v_\mathrm{A}{}^2\right) = -m_\mathrm{B}\left(u_\mathrm{B}{}^2 - v_\mathrm{B}{}^2\right).$$

Ved å bruke 3. kvadratsetning kan den siste likningen omformes til

$$m_\mathrm{A}\left(u_\mathrm{A} - v_\mathrm{A}\right)\left(u_\mathrm{A} + v_\mathrm{A}\right) = -m_\mathrm{B}\left(u_\mathrm{B} - v_\mathrm{B}\right)\left(u_\mathrm{B} + v_\mathrm{B}\right). \qquad (2)$$

Så deler vi (2) på (1), og får:

$$\frac{\cancel{m_\mathrm{A}\left(u_\mathrm{A} - v_\mathrm{A}\right)}\left(u_\mathrm{A} + v_\mathrm{A}\right)}{\cancel{m_\mathrm{A}\left(u_\mathrm{A} - v_\mathrm{A}\right)}} = \frac{\cancel{-m_\mathrm{B}\left(u_\mathrm{B} - v_\mathrm{B}\right)}\left(u_\mathrm{B} + v_\mathrm{B}\right)}{\cancel{-m_\mathrm{B}\left(u_\mathrm{B} - v_\mathrm{B}\right)}}.$$

Etter å ha utført de angitte forkortingene, får vi

$$u_\mathrm{A} + v_\mathrm{A} = u_\mathrm{B} + v_\mathrm{B} \quad \Leftrightarrow \quad v_\mathrm{B} - v_\mathrm{A} = -\left(u_\mathrm{B} - u_\mathrm{A}\right).$$

Og det er jo nettopp den sammenhengen vi skulle fram til.

5.4.2. Massesenteret til et sammensatt legeme.

Den generelle definisjonen av *massesenter* er

$$\mathbf{r}_\mathrm{CM} = \frac{1}{\sum m_i} \cdot \sum m_i \mathbf{r}_i$$

der vi summerer over hele legemet. Men vi kan tenke oss at disse partiklene grupperes i n del-legemer. Da kan vi først summere over de partiklene som utgjør del-legeme 1, deretter over de partiklene som utgjør del-legeme 2, osv. til de partiklene som utgjør del-legeme n. Da blir

$$\mathbf{r}_\mathrm{CM} = \frac{1}{\sum\limits_1 m_i + \cdots + \sum\limits_n m_i}\left(\sum_1 m_i \mathbf{r}_i + \cdots + \sum_n m_i \mathbf{r}_i\right)$$

der indeksene under summetegnene angir hvilket del-legeme vi summerer over. Men masse-senteret til et vilkårlig del-legeme nr. k er jo gitt ved

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM},k} = \frac{1}{\sum\limits_k m_i} \cdot \sum_k m_i \mathbf{r}_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_k m_i \mathbf{r}_i = \sum_k m_i \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{CM},k} = m_k \mathbf{r}_{\mathrm{CM},k}$$

der $m_k = \sum\limits_k m_i$ er massen til del-legeme nr. k. Dermed har vi at

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{\sum_1 m_i + \cdots + \sum_n m_i}\left(\sum_1 m_i\mathbf{r}_i + \cdots + \sum_n m_i\mathbf{r}_i\right) = \frac{1}{m_1 + \cdots + m_n}\left(m_1\mathbf{r}_{\text{CM}.1} + \cdots + m_n\mathbf{r}_{\text{CM}.n}\right).$$

Dette er nettopp den formelen vi benyttet i kap. 5.3.1, men med litt andre symboler.

5.4.3. Kinetisk energi til et sammensatt legeme.

Vi skal se på den kinetiske energien til et legeme som er satt sammen av *n* deler med masser m_1, m_2, …, m_n og hastigheter $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ i forhold til et inertialsystem. Hver av disse hastighetene er vektorsummen av massesenterets hastighet $\mathbf{v}_{\text{CM}}$ og en hastighet $\mathbf{v}_i\,'$ i forhold til massesenteret:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{v}_i\,'.$$

Den samlede kinetiske energien blir da

$$\begin{aligned} W_{\text{kin}} &= \sum \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}\sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \tfrac{1}{2}\sum m_i\left(\mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{v}_i\,'\right)\cdot\left(\mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{v}_i\,'\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\sum m_i \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} + 2\sum m_i \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot \mathbf{v}_i\,' + \sum m_i \mathbf{v}_i\,' \cdot \mathbf{v}_i\,'\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\sum m_i\right)\cdot v_{\text{CM}}{}^2 + \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot \sum m_i \mathbf{v}_i\,' + \sum \tfrac{1}{2} m_i \left(v_i\,'\right)^2 \end{aligned}$$

Vi vet at massesenterets hastighet i forhold til origo er gitt ved

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum m_i \mathbf{v}_i .$$

Men siden $\mathbf{v}_i\,'$ er en partikkels hastighet i forhold til *massesenteret*, må $\frac{1}{M}\sum m_i \mathbf{v}_i\,'$ være massesenterets hastighet i forhold til massesenteret – og denne hastigheten må selvsagt være lik null. Dermed blir $\sum m_i \mathbf{v}_i\,' = \mathbf{0}$. Da reduseres uttrykket for W_{kin} til:

$$W_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2} M \cdot v_{\text{CM}}{}^2 + \sum \tfrac{1}{2} m_i \left(v_i\,'\right)^2 .$$

5.5. Sammendrag.

Symbol:	*Norsk betegnelse:*	*Engelsk betegnelse:*
$\mathbf{p}$	bevegelsesmengde	momentum
$\mathbf{J}$	kraftstøt, impuls	impulse
$\mathbf{r}_{\text{CM}}$	massesenter	Center of Mass

Bevegelsesmengde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ der *m* er massen til et legeme mens **v** er legemets hastighet.

Kraftstøtet $\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,dt$ som reduseres til $\mathbf{J} = \mathbf{F} \cdot t$ når en konstant kraft **F** virker i en tid *t*.

Impulsloven: $\mathbf{J} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$.

Bevaring av bevegelsesmengde: Dersom summen av de ytre kreftene er lik null, er bevegelsesmengden bevart.

Ved et fullstendig elastisk, rettlinjet støt mellom to legemer vil den relative farten mellom legemene bevare sin størrelse, men vil skifte retning.

Massesenter: $\mathbf{r}_{\text{CM}} = \dfrac{1}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}\left(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_n\mathbf{r}_n\right) = \dfrac{1}{M}\sum m_i \mathbf{r}_i .$

Her er m_i massen til partikkel eller del-legeme *i*, mens $\mathbf{r}_i$ er posisjonen til partikkel *i* eller posisjonen til massesenteret til del-legeme *i*.

Massesenterets hastighet $\mathbf{v}_{\text{CM}} = \dfrac{1}{M}\sum m_i \mathbf{v}_i$.

Massesenterets akselerasjon $\mathbf{a}_{\text{CM}}$ er gitt ved $\sum \mathbf{F}_{i,\text{ytre}} = M \cdot \mathbf{a}_{\text{CM}}$.

Når massesenteret til et legeme med masse *M* er en høyde h_{CM} over nullnivået, har legemet en potensiell energi i tyngdefeltet $W_{\text{pot}} = Mgh_{\text{CM}}$.

Den kinetiske energien til et legeme kan uttrykkes som $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}M \cdot v_{\text{CM}}{}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \left(v_i{}'\right)^2$ der v_{CM} er massesenterets fart mens $\sum \frac{1}{2} m_i \left(v_i{}'\right)^2$ er kinetisk energi som følge av partikkel-bevegelser i forhold til massesenteret.

5.6. Oppgaver med løsninger.

5.6.1. Småoppgaver i teksten.

Oppgave 5.1.1:
En fotball med massen $m = 425\,\text{kg}$ som ligger i ro gis et spark, slik at den får fart $v = 20\,\text{m/s}$. Finn den gjennomsnittlige kraften i sparket når vi antar at fotballen var i kontakt med foten i 0.01 s.

Oppgave 5.2.1:
To partikler A og B kan bevege seg på samme rette linje. Partikkel A har masse *m* og fart u_0 . Den kolliderer i et rettlinjet støt med partikkel B som har masse 2*m* og ligger i ro.

a) Finn partiklenes fart etter støtet uttrykt ved u_0 .

b) Hvor stor del av den opprinnelige kinetiske energien er igjen som kinetisk energi etter støtet?

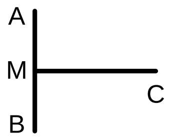
Oppgave 5.2.2:
De to partiklene i oppgave 5.2.1 kolliderer på nytt, men nå er det en 90° vinkel mellom hastighetene før støtet. Nå har A farten u_0 mens B har farten $2u_0$. Støtet er fullstendig uelastisk, slik at de to legemene fortsetter som ett legeme med hastighet **v**. Finn størrelsen og retningen til **v**, og finn også hvor stor del av den opprinnelige kinetiske energien som er igjen som kinetisk energi etter støtet.

Oppgave 5.2.3:
De to partiklene i oppgave 5.2.1 kolliderer på nytt i et rettlinjet støt. Som før har A farten u_0 mens B ligger i ro. Men nå er støtet fullstendig uelastisk. Hvor stor fart får hvert av legemene etter støtet?

Oppgave 5.3.1:
Et legeme består av tre partikler A, B og C, der:

Partikkel A har masse $m_A = 2.5\,\text{kg}$ og ligger i punktet $(-2,1)$.
Partikkel B har masse $m_B = 4.0\,\text{kg}$ og ligger i punktet $(2,3)$.
Plasser partikkel C som har masse $m_C = 3.0\,\text{kg}$ slik at legemets massesenter kommer i origo.

Oppgave 5.3.2:



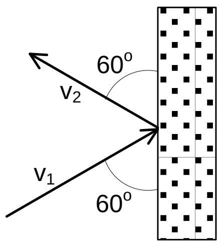
Et legeme har form som en T. Begge armene er laget av samme homogene materiale, og har lengde *l* og masse *m*. Punktet M ligger midt på AB. Hvor ligger legemets massesenter?

Oppgave 5.3.3:

Et legeme har form som en vinkel. Begge "armene" er homogene slik at de har sitt massesenter midt på. Armen OA har lengde *L* og massen $m_A = \frac{2}{3}m$, mens armen OB har lengden $\frac{1}{2}L$ og massen $m_B = \frac{1}{3}m$. Hvor er legemets massesenter?

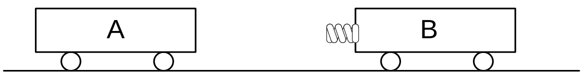
5.6.2. Blandede oppgaver.

Oppgave 5.1:



En ball med masse 10 gram kastes inn mot en vegg med fart $v_1 = 10\,\text{m/s}$ under en vinkel på 60° med veggen, og spretter ut med fart $v_2 = 9\ \text{m/s}$ under en vinkel på 60° med veggen slik figuren viser. Finn den gjennomsnittlige kraften som virker fra veggen mot ballen når vi antar at ballen er i kontakt med veggen i 0.04 sekunder.

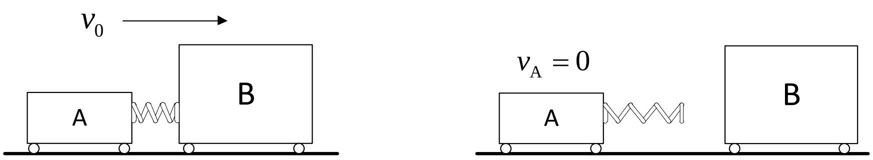
Oppgave 5.2:



To jernbanevogner befinner seg på en horisontal, rett skinnegang. Vogn A har masse $m_A = 3m$, og har fart *u* mot vogn B som har masse $m_B = 2m$ og som står i ro. En buffer (som fungerer som ei elastisk fjær) er festet til en av vognene, og sørger for at vognene støter sammen i et fullstendig elastisk støt. Se bort fra friksjon.

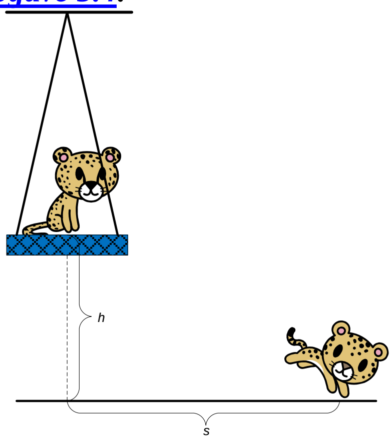
a) Hvor stor fart har hver av vognene etter støtet? Svaret skal uttrykkes ved *u*.
b) Hvor stor del av den opprinnelige kinetiske energien er blitt overført til potensiell energi i bufferen i det øyeblikket da begge vognene har samme fart?

Oppgave 5.3:



To små vogner A og B med masser $m_A = m$ og $m_B = 2m$ kan gli uten friksjon på en horisontal skinnegang. I starten er de festet sammen med ei masseløs, sammenpresset fjær, og beveger seg med fart v_0 med B forrest slik figuren ovenfor til venstre viser. Plutselig utløses fjæra. Da stanser A. Hvor stor potensiell energi var lagret i fjæra? Svaret skal uttrykkes ved *m* og v_0.

Oppgave 5.4:

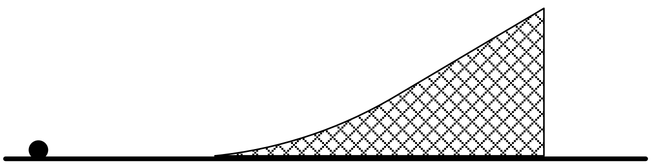


Ei katt med masse $m_k = 5.00\,\text{kg}$ sitter på ei huske som har masse $m_h = 1.50\,\text{kg}$. Se bort fra massen til tauene som holder huska oppe. Plutselig dukker en hund opp, og katta hopper ned fra huska for å gjemme seg. Idet katta hopper av, svinger huska bakover.

Gå ut fra at katta hopper ut horisontalt, og at både katta og huska er partikler. Se bort fra alle former for friksjon.

a) Finn farten til katta idet den forlater huska når du vet at høyden $h = 0.545\,\text{m}$, og at den horisontale strekningen $s = 0.62\,\text{m}$.
b) Bruk resultatet ovenfor til å finne hvor høyt over sitt laveste punkt huska kan komme.

Oppgave 5.5:



Ei kule (som vi skal betrakte som en partikkel) har masse *m*. Den glir med fart v_0 på ei horisontal bordplate, før den fortsetter oppover en rampe som har massen $2m$. Rampen sto opprinnelig i ro, men settes da i bevegelse i samme retning som kula hadde opprinnelig. Det er ingen friksjon, verken mellom kule og bordplate, mellom rampe og bordplate, eller mellom kule og rampe.

a) Forklar at bevegelsesmengden i horisontal retning er bevart.
b) Vis at når kula er i sitt høyeste punkt på rampen, har rampen og kula farten $v = \frac{1}{3}v_0$. Finn (uttrykt ved v_0 og *g*) hvor høyt over bordplata kula da er kommet.

c) Etter at kula har glidd ned rampen igjen, har rampen fått farten v_{R}, mens kula har farten v_{K}. Finn v_{R} og v_{K} uttrykt ved v_0.

5.6.3. Løsninger på småoppgaver.

Oppgave 5.1.1:

Siden fotballen lå i ro før sparket, er

$$F \cdot \Delta t = mv - 0 \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{mv}{\Delta t} = \frac{(0.425\,\mathrm{kg}) \cdot (20\,\mathrm{m/s})}{0.01\mathrm{s}} = \underline{\underline{850\,\mathrm{N}}}.$$

Oppgave 5.2.1:

a) Vi vet at bevegelsesmengden er bevart. For et rettlinjet støt blir

$$m_{\mathrm{A}} u_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} u_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} v_{\mathrm{B}} \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot u_0 = m \cdot v_{\mathrm{A}} + (2m) v_{\mathrm{B}} \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = v_{\mathrm{A}} + 2v_{\mathrm{B}}.$$

I et fullstendig uelastisk støt henger partiklene sammen etter støtet: $v_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{B}} = v$.

$$u_0 = v + 2v_{\mathrm{A}} = 3v \quad \Leftrightarrow \quad v = v_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{B}} = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} u_0}}.$$

b) Kinetisk energi før støtet var

$$\underline{W_1 = \tfrac{1}{2} m \cdot u_0^2}.$$

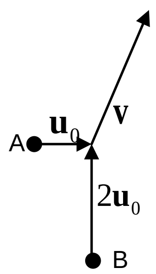
Kinetisk energi etter støtet er

$$W_2 = \tfrac{1}{2}(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}) \cdot v^2 = \tfrac{1}{2}(m + 2m) \cdot \left(\tfrac{1}{3} u_0\right)^2 = \tfrac{3}{2} m \cdot \tfrac{1}{9} u_0^2 = \underline{\tfrac{1}{6} m \cdot u_0^2}.$$

Da er

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\tfrac{1}{6} m u_0^2}{\tfrac{1}{2} m u_0^2} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad W_2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} W_1}}.$$

Oppgave 5.2.2:



Bevaring av bevegelsesmengde gir

$$m \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2m \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2u_0 \end{bmatrix} = (m + 2m)\mathbf{v}$$

$$m \begin{bmatrix} u_0 + 0 \\ 0 + 4u_0 \end{bmatrix} = 3m\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \tfrac{1}{3} u_0 \\ \tfrac{4}{3} u_0 \end{bmatrix}}}$$

Størrelsen til **v** blir

$$v = \sqrt{\left(\tfrac{1}{3} u_0\right)^2 + \left(\tfrac{4}{3} u_0\right)^2} = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}\sqrt{17} \cdot u_0}}.$$

Hastighetesvektoren **v** danner en vinkel θ med bevegelsesretningen til A:

$$\tan\theta = \frac{\tfrac{4}{3} u_0}{\tfrac{1}{3} u_0} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \underline{\underline{76^\circ}}.$$

Kinetisk energi før støtet:

$$W_1 = \tfrac{1}{2} m u_0^2 + \tfrac{1}{2}(2m)(2u_0)^2 = \tfrac{1}{2} m u_0^2 + 4m u_0^2 = \underline{\tfrac{9}{2} m u_0^2}.$$

Kinetisk energi etter støtet:

$$W_2 = \tfrac{1}{2}\left(m+2m\right)v^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 3m\cdot\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{17}\cdot u_0\right)^2 = \underline{\tfrac{17}{6}mu_0^{\;2}}\,.$$

Da blir

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\tfrac{17}{6}mu_0^{\;2}}{\tfrac{9}{2}mu_0^{\;2}} = \tfrac{17}{27} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{W_2 = \tfrac{17}{27}W_1}}$$

Oppgave 5.2.3:

Problemet løses enklest ved å benytte at relativfarten mellom partiklene skifter fortegn uten å endre størrelse ved et slikt støt. Da har vi at

$$v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}} = -\left(0-u_0\right) = v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{A}} + u_0\,.$$

Kombineres dette med bevaring av bevegelsesmengde får vi

$$u_0 = v_{\mathrm{A}} + 2v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{A}} + 2\left(v_{\mathrm{A}} + u_0\right) = 3v_{\mathrm{A}} + 2u_0 \quad\Leftrightarrow\quad 3v_{\mathrm{A}} = -u_0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{v_{\mathrm{A}} = -\tfrac{1}{3}u_0}}\,.$$

Vi ser at A spretter tilbake ved et slikt støt.

$$v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{A}} + u_0 = -\tfrac{1}{3}u_0 + u_0 = \underline{\underline{\tfrac{2}{3}u_0}}\,.$$

Oppgave 5.3.1:

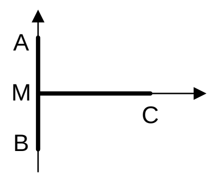
Plasserer punktet C i (x, y). Da er massesenterets posisjon er gitt ved

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}}\left(m_{\mathrm{A}}\mathbf{r}_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\mathbf{r}_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}\mathbf{r}_{\mathrm{C}}\right)$$
$$= \frac{1}{(2.5+4.0+3.0)\,\mathrm{kg}}\left(2.5\,\mathrm{kg}\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} + 4.0\,\mathrm{kg}\cdot\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + 2.0\,\mathrm{kg}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{9.5\,\mathrm{kg}}\begin{bmatrix}-5+8+2x\\2.5+12+2y\end{bmatrix}\mathrm{kg} = \frac{1}{9.5}\begin{bmatrix}3+2x\\14.5+2y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Dette gir at

$$3 + 2x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \underline{\underline{-1.5}}\,.$$
$$14.5 + 2y = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y = \underline{\underline{-7.25}}\,.$$

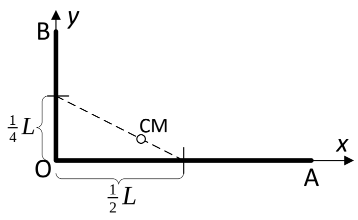
Oppgave 5.3.2:



Legger inn en x-akse og en y-akse som vist på figuren. Siden AB har massesenter i origo, mens MC har massesenter $\tfrac{1}{2}l$ fra origo, blir legemets massesenter gitt ved

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m+m}\left(m\cdot\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + m\cdot\begin{bmatrix}\tfrac{1}{2}l\\0\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2m}\cdot m\cdot\begin{bmatrix}\tfrac{1}{2}l\\0\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}\tfrac{1}{4}l\\0\end{bmatrix}}}\,.$$

Oppgave 5.3.3:



Legger x- og y-akse som vist på figuren. Siden begge "armene" har massesenter midt på, har vinkelen massesenter i

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{\tfrac{2}{3}m + \tfrac{1}{3}m}\left(\tfrac{2}{3}m\cdot\begin{bmatrix}\tfrac{1}{2}L\\0\end{bmatrix} + \tfrac{1}{3}m\begin{bmatrix}0\\\tfrac{1}{4}L\end{bmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{m}\begin{bmatrix}\tfrac{1}{3}mL + 0\\0 + \tfrac{1}{12}mL\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}\tfrac{1}{3}\\\tfrac{1}{12}\end{bmatrix}}}$$

Av figuren ser du at massesenteret ligger utenfor legemet, på forbindelseslinjen mellom massesentrene til de to "armene".

5.6.4. Svar på blandede oppgaver.

Oppgave 5.1:

$$\overline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} -4.11\,\mathrm{N} \\ -0.125\,\mathrm{N} \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5.2:

$$v_{\mathrm{A}} = \tfrac{1}{5}u\,,\ v_{\mathrm{B}} = \tfrac{6}{5}u\,;\ W_{\mathrm{buffer}} = \tfrac{2}{5}W_0\,.$$

Oppgave 5.3:

$$W = \tfrac{3}{4}mv_0^{\ 2}\ .$$

Oppgave 5.4:

$$v_{0k} = 1.86\,\mathrm{m/s}\,,\ h = 1.96\,\mathrm{m}\,.$$

Oppgave 5.5:

$$v = \tfrac{1}{3}v_0\,,\ h = \frac{v_0^{\ 2}}{3g}\,;\ v_{\mathrm{R}} = \tfrac{2}{3}v_0\,,\ v_{\mathrm{K}} = -\tfrac{1}{3}v_0\,.$$