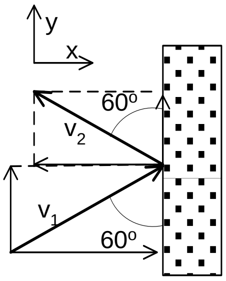
Oppgave 5.1:



Her må vi ta hensyn til at bevegelsesmengde og impuls er vektorer. Vi legger et koordinatsystem slik at startfarten får positive *x*- og *y*-koordinater. Da blir:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -v_2 \sin 60^\circ \\ v_2 \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9\,\text{m/s} \cdot \sin 60^\circ \\ 9\,\text{m/s} \cdot \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.79\,\text{m/s} \\ 4.50\,\text{m/s} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \sin 60^\circ \\ v_1 \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\,\text{m/s} \cdot \sin 60^\circ \\ 10\,\text{m/s} \cdot \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.66\,\text{m/s} \\ 5.00\,\text{m/s} \end{bmatrix}$$

Nå blir

$$\mathbf{J} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{F}} \cdot \Delta t = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \frac{m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t}\left(\begin{bmatrix} -7.79\,\text{m/s} \\ 4.50\,\text{m/s} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8.66\,\text{m/s} \\ 5.00\,\text{m/s} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{0.010\,\text{kg}}{0.04\,\text{s}} \begin{bmatrix} -16.45\,\text{m/s} \\ -0.50\,\text{m/s} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -4.11\,\text{N} \\ -0.125\,\text{N} \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 5.2:

a) Kaller hastighetene etter støtet for v_A og v_B. I et fullstendig elastisk støt skifter den relative farten retning, slik at

$$v_B - v_A = -(0 - u) = u \quad \Leftrightarrow \quad v_B = u + v_A\,.$$

Dessuten er den samlede bevegelsesmengden bevart:

$$m_A u = m_A v_A + m_B v_B \quad \Leftrightarrow \quad 3mu = 3mv_A + 2mv_B \quad \Leftrightarrow \quad 3u = 3v_A + 2v_B\,.$$

Setter inn for v_B:

$$3u = 3v_A + 2(u + v_A) = 5v_A + 2u \quad \Leftrightarrow \quad 5v_A = u \quad \Leftrightarrow \quad v_A = \underline{\underline{\tfrac{1}{5}u}}\,.$$

Da blir

$$v_B = u + v_A = u + \tfrac{1}{5}u = \underline{\underline{\tfrac{6}{5}u}}\,.$$

b) Finner først den felles farten *v* ved å benytte at bevegelsesmengden er bevart:

$$m_A u = (m_A + m_B)v \quad \Leftrightarrow \quad 3m \cdot u = (3m + 2m) \cdot v \quad \Leftrightarrow \quad v = \underline{\tfrac{3}{5}u}\,.$$

Den opprinnelige kinetiske energien er

$$W_0 = \tfrac{1}{2} \cdot 3m \cdot u^2 = \tfrac{3}{2}mu^2\,.$$

I det øyeblikket da begge vognene har samme fart, er den kinetiske energien

$$W_1 = \tfrac{1}{2} \cdot 5m \cdot v^2 = \tfrac{5}{2}m \cdot \left(\tfrac{3}{5}u\right)^2 = \tfrac{9}{10}mu^2\,.$$

Da blir

$$\frac{W_1}{W_0} = \frac{\tfrac{9}{10}mu^2}{\tfrac{3}{2}mu^2} = \tfrac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad W_1 = \tfrac{3}{5}W_0\,.$$

Da må resten være overført til potensiell energi i bufferen, slik at

$$W_{\text{buffer}} = \underline{\underline{\tfrac{2}{5}W_0}}\,.$$

Oppgave 5.3:
Vi må først finne farten v_B til B etter at fjæra ble utløst. Bruker bevaring av bevegelses-mengde:

$$\left(m_A + m_B\right)v_0 = 0 + m_B v_B \quad \Leftrightarrow \quad 3m \cdot v_0 = 2m \cdot v_B \quad \Leftrightarrow \quad \underline{v_B = \tfrac{3}{2}v_0}.$$

Siden det ikke er friksjon, må vi ha energibevaring. Kaller den potensielle energien i fjæra for *W*, og får

$$\tfrac{1}{2}\left(m_A + m_B\right)v_0^2 + W = 0 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\cdot 3m \cdot v_0^2 + W = \tfrac{1}{2}\cdot 2m \cdot \left(\tfrac{3}{2}v_0\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad W = \tfrac{9}{4}mv_0^2 - \tfrac{3}{2}m \cdot v_0^2 = \underline{\underline{\tfrac{3}{4}mv_0^2}}$$

Oppgave 5.4:
a) For å finne kattas fart v_{0k} i avhoppet, bruker vi et koordinatsystem med origo på bakken like under huska. Da setter vi opp:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{0k}t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\tfrac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}.$$

Av den nederste linja får vi

$$h - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0.545\,\mathrm{m}}{9.81\,\mathrm{m/s}}} = \underline{0.333\,\mathrm{s}}.$$

Settes dette inn i den øverste likningen, får vi

$$s = v_{0k}t \quad \Leftrightarrow \quad v_{0k} = \frac{s}{t} = \frac{0.62\,\mathrm{m}}{0.333\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{1.86\,\mathrm{m/s}}}.$$

b) Dersom huskas fart er v_{0h} like etter at katta hoppet av, og den største høyden er h_h, kan vi sette opp denne energilikningen:

$$\tfrac{1}{2}m_h v_{0h}^2 = m_h g h_h \quad \Leftrightarrow \quad h_h = \underline{\frac{v_{0h}^2}{2g}}.$$

For å finne v_{0h}, må vi benytte at bevegelsesmengden er bevart idet katta hopper av. Når kattas fart i avhoppet er v_{0k}, blir

$$m_k v_{0k} - m_h v_{0h} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_{0h} = \frac{m_k}{m_h}v_{0k} = \frac{5.00\,\mathrm{kg}}{1.50\,\mathrm{kg}}\cdot 1.86\,\mathrm{m/s} = \underline{6.2\,\mathrm{m/s}}.$$

Nå kan vi nøste oss tilbake:

$$h_h = \frac{v_{0h}^2}{2g} = \frac{\left(6.2\,\mathrm{m/s}\right)^2}{2\cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}} = \underline{\underline{1.96\,\mathrm{m}}}.$$

Oppgave 5.5:
a) Siden det ikke er friksjon, kan det heller ikke virke noen krefter i horisontal retning. Da er bevegelsesmengden bevart.

b) Når kula er på sitt høyeste punkt på rampen, har den samme fart *v* som rampen. Bevaring av bevegelsesmengde gir da

$$m \cdot v_0 + (2m) \cdot 0 = (m + 2m)v \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{v = \tfrac{1}{3}v_0}} \,.$$

Siden det ikke er friksjon, er mekanisk energi bevart:

$$\tfrac{1}{2}mv_0^{\,2} = \tfrac{1}{2}(m + 2m)v^2 + mgh \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}v_0^{\,2} = \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(\tfrac{1}{3}v_0\right)^2 + gh = \tfrac{1}{6}v_0^{\,2} + gh$$

$$h = \frac{1}{g}\left(\tfrac{1}{2}v_0^{\,2} - \tfrac{1}{6}v_0^{\,2}\right) = \underline{\underline{\frac{v_0^{\,2}}{3g}}}$$

c) Benytter fremdeles bevaring av bevegelsesmengde:

$$m \cdot v_0 + (2m) \cdot 0 = m \cdot v_{\mathrm{K}} + (2m) \cdot v_{\mathrm{R}} \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = v_{\mathrm{K}} + 2v_{\mathrm{R}} \quad \Leftrightarrow \quad v_{\mathrm{K}} = v_0 - 2v_{\mathrm{R}} \,.$$

Dessuten er den mekaniske energien bevart. Siden kula er tilbake på bordplata er det ingen endring av potensiell energi, slik at vi har at

$$\tfrac{1}{2}mv_0^{\,2} + 0 = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{K}}^{\,2} + \tfrac{1}{2} \cdot (2m) \cdot v_{\mathrm{R}}^{\,2} \quad \Leftrightarrow \quad v_0^{\,2} = v_{\mathrm{K}}^{\,2} + 2v_{\mathrm{R}}^{\,2} \,.$$

Setter inn for v_{K}:

$$v_0^{\,2} = (v_0 - 2v_{\mathrm{R}})^2 + 2v_{\mathrm{R}}^{\,2} = v_0^{\,2} - 4v_0v_{\mathrm{R}} + 4v_{\mathrm{R}}^{\,2} + 2v_{\mathrm{R}}^{\,2} = v_0^{\,2} - 4v_0v_{\mathrm{R}} + 6v_{\mathrm{R}}^{\,2}$$

$$4v_0v_{\mathrm{R}} = 6v_{\mathrm{R}}^{\,2} \quad \Leftrightarrow \quad v_{\mathrm{R}} = 0 \quad \vee \quad v_{\mathrm{R}} = \tfrac{4}{6}v_0 = \underline{\underline{\tfrac{2}{3}v_0}}$$

Det er bare løsningen $v_{\mathrm{R}} = \tfrac{2}{3}v_0$ som er brukbar. Den andre løsningen svarer til start-tilstanden. Med denne løsningen får vi at

$$v_{\mathrm{K}} = v_0 - 2v_{\mathrm{R}} = v_0 - 2 \cdot \tfrac{2}{3}v_0 = \underline{\underline{-\tfrac{1}{3}v_0}} \,.$$