4. Arbeid og energi.

Energi er kanskje det nyttigste begrepet vi har i fysikk – og i andre naturvitenskaper også. I dette kapitlet skal vi starte med å definere ***arbeid***, og deretter definere ulike former for energi. Til slutt skal vi se på en viktig setning om bevaring av mekanisk energi.

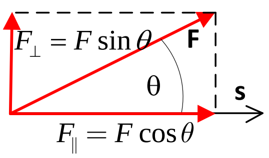
I starten vil jeg legge vekt på en mest mulig systematisk framstilling uten å fordype meg for mye i matematiske detaljer. Men i kap. 4.8 gir jeg en mer generell framstilling av stoffet.

4.1. Definisjon av arbeid.

Ordet ”arbeid” brukes mye i dagligtalen, og vi har en intuitiv forståelse av hva vi mener med dette ordet. Men fra dagligtalen har vi neppe noen entydig definisjon av begrepet ”arbeid”.

I fysikk bruker vi også begrepet ”arbeid”. Men da har det et meget veldefinert innhold, som kanskje ikke alltid stemmer overens med det vi til daglig legger i begrepet.

Vi skal i første omgang definere begrepet "arbeid" for et spesialtilfelle, der vi tar for oss et legeme som påvirkes av en konstant kraft **F**. Vi skal også anta at legemet forflytter seg en rett strekning **s** mens denne kraften virker. I kap. 4.8.1 skal vi lage en mer generell definisjon av begrepet "arbeid".



Kraften **F** dekomponeres i en komponent $F_\parallel = F\cos\theta$ i bevegelsesretningen, og en komponent $F_\perp = F\sin\theta$ vinkelrett på bevegelsesretningen, der F er størrelsen av kraften **F**, og θ er vinkelen mellom **s** og **F** slik figuren til venstre viser.

Da definerer vi:

Det arbeidet som den konstante kraften **F** utfører under en rettlinjet forflytning **s** er

$$W = F_\parallel \cdot s = F \cdot s \cdot \cos\theta$$

der F og s er størrelsen av henholdsvis **F** og **s**, og θ er vinkelen mellom **s** og **F**.

Vi ser at benevningen for arbeid må være $\text{Newton} \cdot \text{meter}$, eller Nm. Denne størrelsen har fått et eget navn, ***Joule***, forkortet J.

Legg merke til at både kraften **F** og strekningen **s** er vektorer, slik at retningene spiller en stor rolle. Arbeidet W er imidlertid en skalar, og har derfor ingen retning. Legg også merke til den viktige egenskapen nedenfor, som kanskje strider mot vanlig bruk av begrepet "arbeid":

Det er kun kraftkomponenten i bevegelsesretningen som kan utføre et arbeid.

En viktig konsekvens av denne definisjonen er da:

En sentripetalkraft kan aldri utføre noe arbeid.

Vi husker at friksjonskrefter alltid virker *mot* bevegelsesretningen, slik at **s** og $\mathbf{F}_f$ alltid har motsatte retninger. Vinkelen mellom **s** og $\mathbf{F}_f$ blir derfor $180°$. Det *friksjonsarbeidet* som en friksjonskraft $\mathbf{F}_f$ utfører, blir derfor

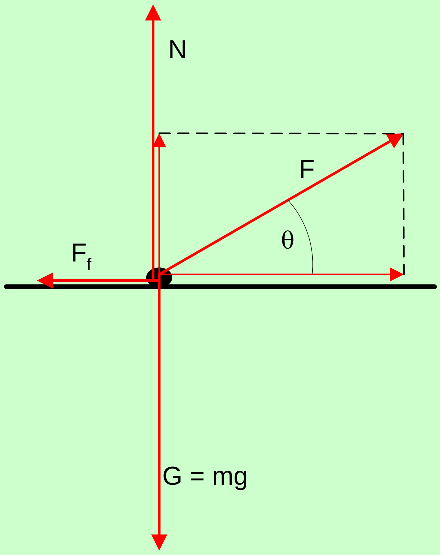
$$W_f = \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{s} = F_f \cdot s \cdot \cos(180°) = -F_f \cdot s\,.$$

Friksjonsarbeidet er altså alltid negativt.

Eksempel 4.1.1: En kjelke har massen $m = 100\,\text{kg}$. Den trekkes en strekning $s = 10\,\text{m}$ på horisontalt underlag med en konstant kraft $F = 200\,\text{N}$. Kraften danner en vinkel $\theta = 30^\circ$ over horisontalplanet. Friksjonstallet mellom meiene og underlaget er $\mu = 0.15$.

a) Finn det arbeidet som trekk-kraften utfører, og det arbeidet som friksjonskraften utfører.
b) Finn det samlede arbeidet som kreftene utfører.

Løsning: Vi starter med å lage en figur, der kjelken erstattes av et massepunkt:



a) Trekk-kraften utfører et arbeid

$$W_1 = F \cdot s \cdot \cos 30^\circ$$
$$= 200\,\text{N} \cdot 10\,\text{m} \cdot \cos 30^\circ = \underline{\underline{1732\,\text{J}}}$$

For å finne friksjonskraften F_f, må jeg først finne normalkraften *N*. Det er ingen akselerasjon vinkelrett på bakken, slik at

$$F \sin\theta + N - mg = 0$$
$$N = mg - F\sin\theta$$
$$= 100\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 - 200\,\text{N} \cdot \sin 30^\circ = \underline{881\,\text{N}}$$
$$F_f = \mu N = 0.15 \cdot 881\,\text{N} = \underline{132\,\text{N}}.$$

Friksjonskraften utfører et arbeid

$$W_2 = F_f \cdot s \cdot \cos 180^\circ$$
$$= 132\,\text{N} \cdot 10\,\text{m} \cdot (-1) = \underline{\underline{-1320\,\text{J}}}$$

b) Det samlede arbeidet blir derfor

$$W = W_1 + W_2 = 1732\,\text{J} + (-1320\,\text{J}) = \underline{\underline{412\,\text{J}}}.$$

Dette kunne vi også funnet på en annen måte. Vi vet at det kun er kraftkomponentene i horisontal retning som utfører arbeid siden kjelken flyttes horisontalt. Summen av kreftene i horisontal retning er

$$\sum F_x = F\cos\theta - F_f = 200\,\text{N} \cdot \cos 30^\circ - 132\,\text{N} = 41.2\,\text{N}.$$

Da blir arbeidet

$$\left(\sum F_x\right) \cdot s = 41.2\,\text{N} \cdot 10\,\text{m} = \underline{\underline{412\,\text{J}}}.$$

Oppgave: 4.1.1, 4.1.2.

4.2. Kinetisk energi.

Vi skal nå se på et svært nyttig begrep: ***Kinetisk energi***. Vi tar da utgangspunkt i en partikkel med masse *m* som starter i et punkt A og beveger seg rettlinjet en strekning *s* til et annet punkt B under påvirkning av en konstant kraft (eller kraftkomponent) *F* som virker i bevegelses-retningen. Det arbeidet som denne kraften utfører blir da

$$W = F \cdot s = (m \cdot a) \cdot s = m \cdot (a \cdot s)$$

der a er den akselerasjonen som partikkelen får. Men vi vet at når kraften er konstant, er også akselerasjonen konstant. Da har vi at

$$v_\mathrm{B}^{\;2} - v_\mathrm{A}^{\;2} = 2as \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot s = \tfrac{1}{2}\left(v_\mathrm{B}^{\;2} - v_\mathrm{A}^{\;2}\right).$$

Dermed blir

$$W = m \cdot (a \cdot s) = m \cdot \tfrac{1}{2}\left(v_\mathrm{B}^{\;2} - v_\mathrm{A}^{\;2}\right) = \tfrac{1}{2} m v_\mathrm{B}^{\;2} - \tfrac{1}{2} m v_\mathrm{A}^{\;2}.$$

Anta at partikkelen starter i ro, slik at $v_\mathrm{A} = 0$. Farten i B kaller vi bare v. Da vil kraften F utføre et arbeid som er lik $\tfrac{1}{2}mv^2$. Denne størrelsen kaller vi ***partikkelens kinetisk energi***. Denne definisjonen er så viktig at vi rammer den inn:

> Dersom en partikkel med masse m har en fart v, har partikkelen en ***kinetisk energi***
>
> $$W_\mathrm{kin} = \tfrac{1}{2} m v^2.$$

Vi har altså vist at dersom en kraft F endrer partikkelens fart, blir det arbeidet som F utfører lik endringen av partikkelens kinetiske energi.

Utledningen ovenfor forutsatte at vi har en *konstant* kraft og en *rettlinjet* bevegelse. I kap. 4.8.2 skal vi vise at begge disse forutsetningene er unødvendige. Selv om vi ikke har rettlinjet bevegelse, og selv om kraften avhenger av posisjonen **r**, får vi at:

> La $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vær vektorsummen av de kreftene som virker på en partikkel. Dersom kraften $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ fører til at partikkelens fart endres fra v_A til v_B, har $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ utført et arbeid
>
> $$W = \tfrac{1}{2} m v_\mathrm{B}^{\;2} - \tfrac{1}{2} m v_\mathrm{A}^{\;2}.$$

Eksempel 4.2.1: En bil med masse $m = 1000\,\mathrm{kg}$ trenger en bremsestrekning på 24 meter for å bremse ned fra 72 km/h til full stans på horisontal vei.

a) Hvor stort arbeid har friksjonskraften mellom bilhjul og veibane utført?

b) Finn friksjonstallet mellom bilhjul og veibane.

Løsning: $72\,\mathrm{km/h} = 72 \cdot \dfrac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{m/s}$.

a) Kaller startfarten $v_\mathrm{A} = 20\,\mathrm{m/s}$, mens sluttfarten er $v_\mathrm{B} = 0\,\mathrm{m/s}$. Friksjonskraften F_f har da utført et arbeid

$$W = \tfrac{1}{2} m v_\mathrm{B}^{\;2} - \tfrac{1}{2} m v_\mathrm{A}^{\;2} = \tfrac{1}{2} \cdot 1000\,\mathrm{kg} \cdot \left((0\,\mathrm{m/s})^2 - (20\,\mathrm{m/s})^2 \right) = \underline{\underline{-2.0 \cdot 10^5\,\mathrm{J}}}.$$

b) Det arbeidet som friksjonskraften utfører, er gitt ved

$$W = -F_f \cdot s = -\mu N \cdot s = -\mu m g \cdot s$$

der N er normalkraften fra underlaget mot bilen mens s er bremsestrekningen. Minustegnet skyldes at F_f og s har motsatte retninger. Dette arbeidet er lik endringen av kinetisk energi:

$$W = -\mu mg \cdot s = -2.0 \cdot 10^5\ \mathrm{J} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{W}{mgs} = \frac{2.0 \cdot 10^5\ \mathrm{J}}{1000\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 24\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{0.85}}\,.$$

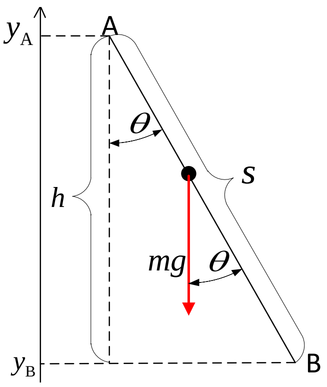
Det er faktisk mulig å finne friksjonstallet uten å kjenne bilens masse. Vi kan regne slik:

$$-\mu \cancel{m} g \cdot s = \tfrac{1}{2}\cancel{m}\underbrace{v_B{}^2}_{=0} - \tfrac{1}{2}\cancel{m} v_A{}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{v_A{}^2}{2g \cdot s} = \frac{(20\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 24\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{0.85}}\,.$$

Oppgave: 4.2.1, 4.2.2.

4.3. Potensiell energi i tyngdefeltet.

Vi skal nå se nærmere på det arbeidet som tyngdekraften utfører. I neste kapitel skal vi kombinere det med formelen for endring av kinetisk energi. Resultatet er en av de nyttigste sammenhengene vi har i mekanikken.



Vi skal foreløpig begrense oss til rettlinjet bevegelse i tyngdefeltet. En partikkel med masse *m* beveger seg skrått nedover fra A til B, der vinkelen mellom vertikalen og banen er θ. Under bevegelsen påvirkes partikkelen av tyngden $G = mg$, og kan også påvirkes av andre krefter. Vi skal imidlertid begrense oss til å beregne det arbeidet som tyngden utfører.

Vi ser at høydeforskjellen *h* mellom A og B er

$$h = s\cos\theta\,.$$

Da blir det arbeidet som tyngdekraften utfører:

$$W = G \cdot s \cdot \cos\theta = mg \cdot s\cos\theta = \underline{\underline{mgh}}\,.$$

I kap. 4.8.3 viser vi at det ikke er nødvendig å kreve rettlinjet bevegelse. Selv om banen er krum, får vi at:

Når legeme med masse *m* faller en høydeforskjell *h*, utfører tyngden et arbeid

$$W = mgh\,.$$

Det er ofte nyttig å innføre en *y*-akse som vist på figuren. Da er $h = y_A - y_B$, slik at

$$W = mgh = mg\left(y_A - y_B\right) = mgy_A - mgy_B = -\left(mgy_B - mgy_A\right).$$

Nå definerer vi:

Et legeme med masse *m* som befinner seg en høyde *y* over et valgt nullnivå, har en ***potensiell energi i tyngdefeltet*** gitt ved

$$W_{pot} = mgy\,.$$

Dermed får vi at:

Det arbeidet som tyngdekraften utfører på en partikkel med masse *m*, er lik *reduksjonen* av partikkelens potensielle energi i tyngdefeltet.

4.4. Bevaring av mekanisk energi.

Vi har tidligere vist at når en kraft **F** utfører et arbeid på en partikkel, får partikkelen en endring av kinetisk energi. Dette gjelder selvsagt også for det arbeidet som tyngden utfører. Men dette arbeidet er lik endringen av potensiell energi for partikkelen. Dette gir at

$$W = -mgy_{\mathrm{B}} + mgy_{\mathrm{A}} = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^{2} - \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^{2} + mgy_{\mathrm{A}} = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^{2} + mgy_{\mathrm{B}}}}\,.$$

Resultatet ovenfor kan nå oppsummeres slik:

Dersom ingen andre krefter enn tyngden virker når et legeme beveger seg fra A til B, er

$$\tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^{2} + mgy_{\mathrm{A}} = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^{2} + mgy_{\mathrm{B}}$$

slik at summen av legemets kinetiske energi og potensielle energi i tyngdefeltet er bevart.

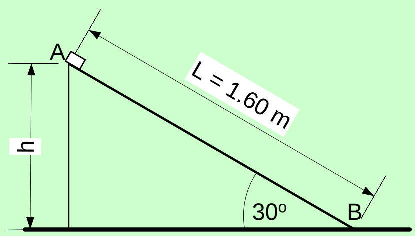
Kinetisk energi og potensiell energi i tyngdefeltet er to former for ***mekanisk energi***.

Når du benytter denne setningen, bør du gå fram på følgende måte:

1. Lag en figur der du tegner inn partikkelens bane.
2 Merk av to punkter A og B der du har kjente størrelser og den (de) størrelsene som du vil finne.
3. Definer et nullnivå for potensiell energi. Det er ofte gunstig å la dette nullnivået gå gjennom det laveste av punktene A og B.
4. Sett opp at $mgy + \tfrac{1}{2}mv^{2}$ er like stor i begge punktene.
5. Løs den likningen som framkommer.

Eksempel 4.4.1: En liten kloss slippes på toppen av et 1.60 meter langt skråplan som danner 30° med horisontalplanet. Klossen glir uten friksjon ned skråplanet. Hvor stor fart har klossen ved foten av skråplanet?

Løsning:



Kaller startpunktet øverst på skråplanet for A, og sluttpunktet nederst for B. Legger nullnivå for potensiell energi gjennom B. Da er $y_{\mathrm{B}} = 0\,\mathrm{m}$ og

$$y_{\mathrm{A}} = h = L\sin 30^{\circ} = 1.60\,\mathrm{m}\cdot\sin 30^{\circ} = \underline{0.80\,\mathrm{m}}\,.$$

Setter opp energilikningen:

$$\cancel{m}gy_A + \tfrac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 = \cancel{m}gy_B + \tfrac{1}{2}\cancel{m}v_B^2$$

$$9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 0.80\,\text{m} + \tfrac{1}{2}\cdot(0\,\text{m/s})^2 = 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 0\,\text{m} + \tfrac{1}{2}\cdot v_B^2$$

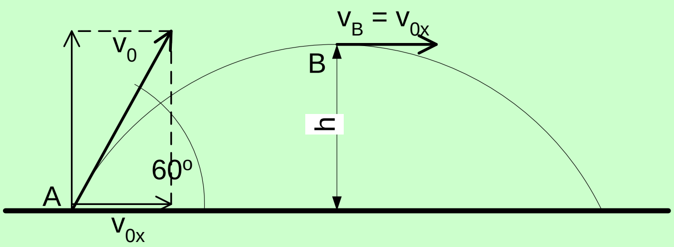
$$7.85\,\text{m}^2/\text{s}^2 = \tfrac{1}{2}\cdot v_B^2 \quad\Leftrightarrow\quad v_B = \sqrt{2\cdot 7.85\,\text{m}^2/\text{s}^2} = \underline{\underline{3.96\,\text{m/s}}}$$

Oppgave: 4.4.1.

I eksemplet over ble klossen sluppet på et *skråplan*. Men så lenge det ikke er friksjon, er det likegyldig hva slags flate klossen glir på. Du får samme resultat om klossen glir på et skråplan, eller slippes rett ned, eller glir på innsiden av ei kuleformet renne, eller beveger seg på en annen måte. Det er kun høydeforskjellen mellom punktene A og B som betyr noe.

Eksempel 4.4.2: Et lite legeme kastes skrått oppover med startfart $10\,\text{m/s}$. Start-hastigheten danner en vinkel på 60° med horisontalplanet. Finn legemets største høyde når vi ser bort fra luftmotstand.

Løsning:



Kaller startpunktet for A og høyeste punkt i banen for B. Siden det ikke er luftmotstand, er det ingen krefter og heller ingen akselerasjon i horisontal retning. Da blir

$$v_B = v_{0x} = v_0 \cos 60^\circ = 10\,\text{m/s}\cdot 0.500 = \underline{5.0\,\text{m/s}}.$$

Legger nullnivå for potensiell energi gjennom A. Da blir energilikningen:

$$\cancel{m}gy_A + \tfrac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 = \cancel{m}gy_B + \tfrac{1}{2}\cancel{m}v_B^2$$

$$9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 0\,\text{m} + \tfrac{1}{2}\cdot(10\,\text{m/s})^2 = 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot h + \tfrac{1}{2}\cdot(5.0\,\text{m/s})^2$$

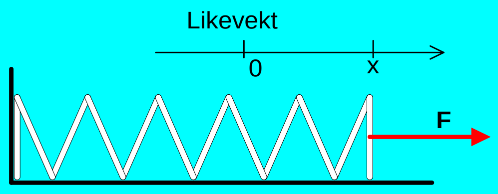
$$50\,\text{m}^2/\text{s}^2 - 12.5\,\text{m}^2/\text{s}^2 = 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot h$$

$$h = \frac{(50-12.5)\,\text{m}^2/\text{s}^2}{9.81\,\text{m/s}^2} = \underline{\underline{3.82\,\text{m}}}$$

Oppgave: 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4.

4.5. Elastiske krefter. Potensiell energi i ei fjær.

Vi vet at vi må bruke en kraft for å forlenge eller presse sammen ei fjær. Eksperimenter viser at nær likevektsstillingen er sammenhengen mellom størrelsen av trekk-kraften F og forlengelsen x gitt ved *Hookes lov*:



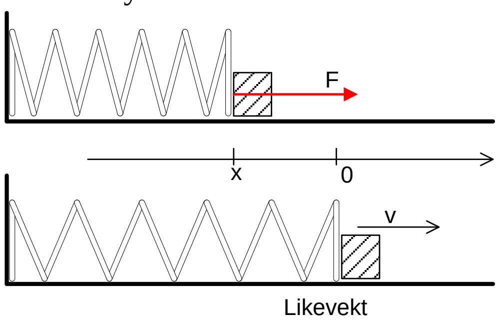
Kraften F som skal til for å forlenge eller presse sammen ei fjær en strekning x fra likevekt, er proporsjonal med x:

$$F = k \cdot x$$

Her er k en konstant som kalles ***fjærkonstanten*** eller ***fjærstivheten***, og som har benevning N/m. At k er *konstant* må oppfattes som at for en bestemt fjær er k uavhengig av forlengelsen / sammenpressingen x, så lenge x ikke er så stor at fjæra deformeres permanent. En annen fjær vil normalt ha en annen verdi for k.

Men når du trekker i fjæra med en kraft F, må fjæra virke tilbake på deg med en motsatt like stor kraft $F' = -F = -k \cdot x$. Denne kraften *fra* fjæra *mot* deg kaller vi ***fjærkraften***. Denne kraften kan vi bruk til å sette et legeme i bevegelse, og dermed gi legemet en kinetisk energi.

La oss analysere dette nærmere:



Vi presser sammen ei fjær en strekning x, og plasserer en kloss med masse m like foran den sammenpressede fjæra. Da virker det en kraft $F = -k \cdot x$ fra fjæra mot klossen. Minustegnet skyldes at dersom x er negativ (som på figuren), blir F positiv og omvendt.

Vi skal nå beregne det arbeidet som fjærkraften utfører når klossen flyttes fra x_A til x_B. Men fjærkraften er ikke konstant på denne strekningen. Vi løser det problemet ved å dele opp strekningen i mange svært små biter, som hver har lengden Δx. Innenfor hver bit kan vi anta at kraften er konstant lik $F = -k \cdot x$. Arbeidet som gjøres innenfor et slikt lite intervall blir

$$\Delta W = F \cdot \Delta x = -kx \cdot \Delta x .$$

Vi finner det samlede arbeidet ved å summere alle disse bidragene:

$$W = \sum_{x_A}^{x_B} \Delta W = \sum_{x_A}^{x_B} (-kx) \cdot \Delta x .$$

Fra matematikken vet vi at det kan være lurt å la antall intervaller gå mot uendelig samtidig som $\Delta x \to 0$. Da kan vi erstatte summasjonen med et integral, slik at vi får:

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F(x) \cdot dx = \int_{x_A}^{x_B} -kx \cdot dx = -k \cdot \tfrac{1}{2} \left[x^2 \right]_{x_A}^{x_B} = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2} k x_B{}^2 + \tfrac{1}{2} k x_A{}^2}} .$$

Vi ser at dette arbeidet kun avhenger av start- og sluttposisjonene til fjæra. På samme måte som for tyngdekraftens arbeid er det nå naturlig å definere:

Ei fjær med fjærkonstant k som er presset sammen eller forlenget en strekning x fra likevekt, har en ***potensiell energi*** gitt ved

$$W_{pot} = \tfrac{1}{2} k x^2 .$$

Videre ser vi at:

Arbeidet som fjærkraften utfører, er

$$W = -\left(\tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{B}}^{\;2} - \tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{A}}^{\;2}\right)$$

slik at arbeidet er lik *reduksjonen* i potensiell energi i fjæra.

Vi vet at det arbeidet som fjærkraften utfører når posisjonen endres fra en startposisjon x_{A} til en sluttposisjon x_{B}, er lik endringen av kinetisk energi. Da får vi:

$$W = -\tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{B}}^{\;2} + \tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{A}}^{\;2} = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^{\;2} - \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^{\;2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^{\;2} + \tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{B}}^{\;2} = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^{\;2} + \tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{A}}^{\;2}}}\,.$$

Vi har altså vist at:

Dersom ingen andre krefter enn fjærkraften utfører arbeid på et legeme, er

$$\tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^{\;2} + \tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{B}}^{\;2} = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^{\;2} + \tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{A}}^{\;2}$$

slik at summen av legemets kinetiske energi og potensielle energi i fjæra er bevart.

Eksempel 4.5.1: Vi henger en kloss med masse 100 gram i ei fjær, og merker oss at fjæra da forlenges 8.3 cm fra likevekt. Se bort fra fjæras egen masse.

a) Finn fjærkonstanten *k*.

b) Fjæra legges horisontalt. Fjæras ene ende festes til en vegg. Fjæra presses sammen 14.0 cm. En liten partikkel med masse 10.0 gram plasseres inntil fjæra. Finn farten til partikkelen når fjæra utløses.

Løsning:

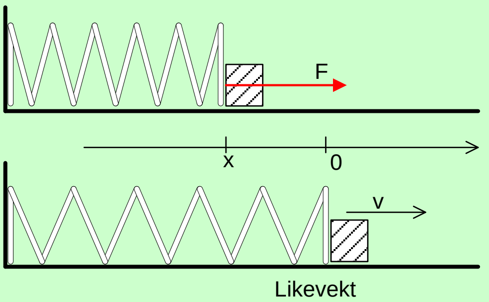
a) Siden klossen henger i ro, påvirkes den av to motsatt like store krefter: Tyngden og fjærkraften. Da blir

$$|F| = |mg| = 0.100\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} = 0.981\,\mathrm{N}\,.$$

Fjærkonstanten *k* er

$$k = \frac{|F|}{|x|} = \frac{0.981\,\mathrm{N}}{0.083\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{11.8\,\mathrm{N/m}}}\,.$$

b)



I startposisjonen A er klossen i ro, mens sammenpressingen er $x_{\mathrm{A}} = 0.117\,\mathrm{m}$. I sluttposisjonen B er fjæra ikke presset sammen, men farten er v_{B}. Energilikningen blir

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}mv_{\mathrm{B}}^{\;2} + \tfrac{1}{2}k\underbrace{x_{\mathrm{B}}}_{=0\,\mathrm{m}}{}^{2} = \tfrac{1}{2}m\underbrace{v_{\mathrm{A}}}_{=0\,\mathrm{m/s}}{}^{2} + \cancel{\tfrac{1}{2}}kx_{\mathrm{A}}^{\;2}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x_A = \sqrt{\frac{11.8\,\mathrm{N/m}}{0.010\,\mathrm{kg}}} \cdot 0.140\,\mathrm{m} = \underline{\underline{4.81\,\mathrm{m/s}}}\,.$$

Oppgave 4.5.1.

Hittil har vi bare snakket om krefter i ei fjær. Men eksperimenter viser at vi har en tilsvarende sammenheng mellom kraft og forskyvning fra likevekt for mange andre elastiske legemer også. Vi kan nevne nedbøyning av en bjelke eller vridning av en aksling. Formelen for potensiell energi i ei fjær kan derfor gis en mer generell tolking enn vi har gjort her.

4.6. Mer om energibevaring.

I kap 4.4. satte vi opp en likning for bevaring av mekanisk energi under forutsetning av at ingen andre krefter enn tyngden virket. Men i praksis vil det vanligvis være andre krefter til stede. Både fjærkrefter, friksjon og kanskje andre typer krefter kan komme på tale. Vi må derfor utvide energilikningen fra kap. 4.4.

Vi skal samle de resultatene som vi har kommet fram til hittil:

- Det arbeidet som tyngden utfører når en partikkel beveger seg fra y_A til y_B er
  $$W_G = -mgy_B + mgy_A\,.$$
- Det arbeidet som kraften $F = -kx$ i ei fjær utfører når en partikkelen beveger seg fra x_A til x_B er
  $$W_{fjær} = -\tfrac{1}{2}kx_B^{\ 2} + \tfrac{1}{2}kx_A^{\ 2}\,.$$
- Det arbeidet som friksjonskraften F_f utfører når en partikkelen beveger seg en strekning *s* er
  $$W_f = -F_f \cdot s\,.$$

Vanligvis klarer vi oss med disse kreftene. Men generelt kan vi ha flere typer krefter. La oss slå dem sammen til F_{andre}, og sette at disse kreftene utfører et arbeid W_{andre}.

Vi startet med at det arbeidet som kreftene utfører, er lik endringen av kinetisk energi slik vi viste i kap. 4.2. Da har vi altså:

$$W_G + W_{fjær} + W_f + W_{\mathrm{andre}} = \tfrac{1}{2}mv_B^{\ 2} - \tfrac{1}{2}mv_A^{\ 2}$$

$$\left(-mgy_B + mgy_A\right) + \left(-\tfrac{1}{2}kx_B^{\ 2} + \tfrac{1}{2}kx_A^{\ 2}\right) + \left(-F_f \cdot s\right) + W_{\mathrm{andre}} = \tfrac{1}{2}mv_B^{\ 2} - \tfrac{1}{2}mv_A^{\ 2}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_A^{\ 2} + mgy_A + \tfrac{1}{2}kx_A^{\ 2} + W_{\mathrm{andre}} - F_f \cdot s = \tfrac{1}{2}mv_B^{\ 2} + mgy_B + \tfrac{1}{2}kx_B^{\ 2}$$

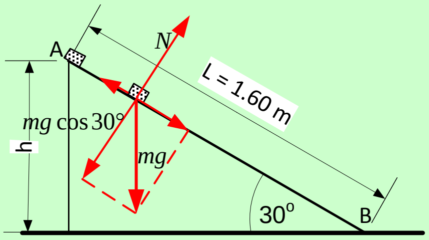
Likningen over kan formuleres slik:

Når et legeme flyttes fra et startpunkt A til et sluttpunkt B, er legemets totale mekaniske energi i B lik legemets totale mekaniske energi i A pluss det arbeidet som andre krefter enn tyngde og fjærkraft har utført på legemet, minus friksjonsarbeidet.

Vi skal nå gå tilbake til Eksempel 4.4.1, men gjøre det mer realistisk ved at vi tar hensyn til friksjon.

Eksempel 4.6.1: En liten kloss slippes på toppen av et 1.60 meter langt skråplan som danner 30° med horisontalplanet. Friksjonstallet mellom kloss og skråplan er $\mu = 0.10$. Hvor stor fart har klossen ved foten av skråplanet?

Løsning:



Kaller startpunktet øverst på skråplanet for A, og sluttpunktet nederst for B. Legger nullnivå for potensiell energi gjennom B. Da er $y_B = 0\,\text{m}$ og

$$y_A = h = L\sin 30^\circ = 1.60\,\text{m}\cdot\sin 30^\circ = \underline{0.80\,\text{m}}\,.$$

Ser at størrelsen av normalkraften blir

$$N = mg\cos 30^\circ = mg\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

Friksjonsarbeidet blir da

$$W_f = -F_f\cdot L = -\mu N\cdot L = -\mu mg\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot L\,.$$

Setter opp energilikningen:

$$\cancel{m}gy_A + \tfrac{1}{2}\cancel{m}v_A^{\,2} - \mu\cancel{m}g\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot L = \cancel{m}gy_B + \tfrac{1}{2}\cancel{m}v_B^{\,2}$$

$$9.81\,\text{m/s}^2\cdot 0.80\,\text{m} + \tfrac{1}{2}\cdot(0\,\text{m/s})^2 - 0.10\cdot(9.81\,\text{m/s}^2)\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot(1.60\,\text{m}) = 9.81\,\text{m/s}^2\cdot 0\,\text{m} + \tfrac{1}{2}\cdot v_B^{\,2}$$

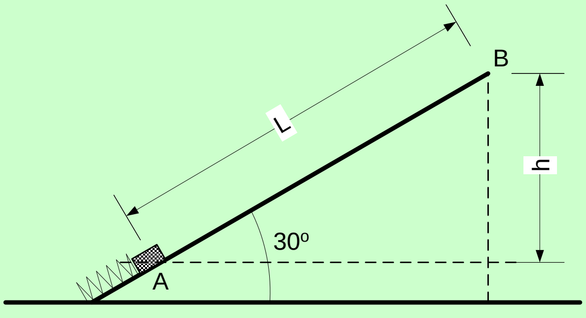
$$7.85\,\text{m}^2/\text{s}^2 - 1.36\,\text{m}^2/\text{s}^2 = \tfrac{1}{2}\cdot v_B^{\,2} \quad\Leftrightarrow\quad v_B = \sqrt{2\cdot(7.85-1.36)\,\text{m}^2/\text{s}^2} = \underline{\underline{3.60\,\text{m/s}}}$$

Oppgave: 4.6.1.

Eksempel 4.6.2: Ei fjær ligger langs et skråplan som har helningsvinkel 30° over horisontal-planet. Fjæra har fjærstivheten $k = 100\,\text{N/m}$ og er trykt sammen $x = 0.10\text{m}$ fra likevekt. På toppen av fjæra ligger en liten kloss med massen $m = 0.100\text{kg}$.

a) Hvor langt fra startposisjonen (med sammenpresset fjær) beveger klossen seg oppover skråplanet når vi slipper fjæra? Se bort fra friksjon.

b) Det viser seg at klossen stopper og snur allerede 0.60m fra startposisjonen. Dette skyldes at det virker en konstant friksjon på klossen under hele bevegelsen. Hvor stor er denne friksjonskraften?



Løsning: Vi starter med å tegne en figur, der vi lar startposisjonen være nullnivå for potensiell energi i tyngdefeltet.

Av figuren ser vi at

$$h = L\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}L\,.$$

Vi setter opp energilikninger:

a) I startposisjonen A er $v_A = 0\,\text{m/s}$, $z_A = 0\,\text{m}$ og fjæras sammenpressing $x_A = 0.100\,\text{m}$.
I det høyeste punktet B er $v_B = 0\,\text{m/s}$, $z_B = h = \frac{1}{2}L$ og fjæras sammenpressing $x_B = 0\,\text{m}$.
Nå antar vi at det ikke virker andre krefter enn fjærkraft og tyngde. Da blir

$$\tfrac{1}{2}m \underbrace{v_A}_{=0\,\text{m/s}}{}^2 + mg \underbrace{z_A}_{=0\,\text{m}} + \tfrac{1}{2}kx_A{}^2 = \tfrac{1}{2}m \underbrace{v_B}_{=0\,\text{m/s}}{}^2 + mgz_B + \tfrac{1}{2}k \underbrace{x_B}_{=0\,\text{m}}{}^2 .$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}kx_A{}^2 = mgz_B = mg \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}}L \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{kx_A{}^2}{mg} = \frac{100\,\text{N/m}\cdot(0.10\,\text{m})^2}{0.100\,\text{kg}\cdot 9.81\,\text{m/s}^2} = \underline{\underline{1.02\,\text{m}}} .$$

b) Når det viser seg at klossen kun kommer 0.60m fra startpunktet før den snur, er det klart at det må virke friksjon. Vi lar fremdeles B være klossens øverste punkt, 0.60m fra A.
Da er $L = 0.60\,\text{m}$ og $h = \frac{1}{2}L = 0.30\,\text{m}$. Energilikningen blir nå:

$$\tfrac{1}{2}m \underbrace{v_A}_{=0\,\text{m/s}}{}^2 + mg \underbrace{z_A}_{=0\,\text{m}} + \tfrac{1}{2}kx_A{}^2 - F_f \cdot L = \tfrac{1}{2}m \underbrace{v_B}_{=0\,\text{m/s}}{}^2 + mgz_B + \tfrac{1}{2}k \underbrace{x_B}_{=0\,\text{m}}{}^2$$

$$\tfrac{1}{2}kx_A{}^2 - F_f \cdot L = mgz_B = mg \cdot \tfrac{1}{2}L$$

$$F_f = \frac{\tfrac{1}{2}kx_A{}^2 - mg\cdot\tfrac{1}{2}L}{L} = \frac{kx_A{}^2}{2L} - \frac{mg}{2}$$

$$= \frac{100\,\text{N/m}\cdot(0.10\,\text{m})^2}{2\cdot 0.60\,\text{m}} - \frac{0.100\,\text{kg}\cdot 9.81\,\text{m/s}^2}{2} = \underline{\underline{0.34\,\text{N}}}$$

Oppgaver: 4.6.2.

4.7. Effekt.

Hittil har vi konsentrert oss om *hvor mye* arbeid som utføres. Nå skal vi se på *hvor raskt* arbeidet utføres. Vi starter med en definisjon:

Dersom et arbeid ΔW utføres på en tid Δt, er den ***gjennomsnittlige effekt***

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} .$$

Effekt måles i *Watt* (W), der 1 Watt er lik 1 Joule per sekund.

Eksempel 4.7.1: Finn den gjennomsnittlige effekt når en koffert med masse 20 kg løftes fra gulvet og opp på ei bagasjehylle 2.0 meter over gulvet i løpet av 2.5 sekunder.

Løsning: For å løfte kofferten, må vi utføre et arbeid som er lik endringen i potensiell energi for kofferten:

$$\Delta W = mgh = 20\,\text{kg}\cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 2.0\,\text{m} = \underline{392\,\text{J}} .$$

Gjennomsnittlig effekt er

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{392\,\text{J}}{2.5\,\text{s}} = \underline{\underline{157\,\text{Watt}}} .$$

Vi finner den ***momentane effekten*** *P* ved å la $\Delta t \to 0$. I løpet av et svært kort tidsintervall Δt er både kraften *F* og vinkelen θ mellom kraftretning og bevegelsesretning konstant. Da får vi at den momentane effekten blir:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{d\left(F \cdot s \cdot \cos\theta\right)}{dt} = F \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \cos\theta = \underline{\underline{F \cdot v \cdot \cos\theta}}\,.$$

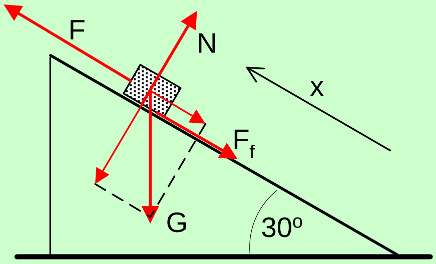
Dette resultatet rammer vi inn:

Når et legeme har fart *v* og påvirkes av en kraft *F* som danner en vinkel θ med bevegelses-retningen, er effekten

$$P = F \cdot v \cdot \cos\theta\,.$$

Eksempel 4.7.2: En rampe har helningsvinkel 30°. En bil med masse 1500 kg trekkes opp på denne rampen med konstant fart 0.50 m/s. Hvor stor effekt må til for å trekke bilen opp rampen når vi antar at friksjonskraften er lik 240 N, og at trekk-kraften er parallell med skråplanet?

Løsning:



Legger *x*-aksen opp langs skråplanet. Da er størrelsen av trekk-kraften

$$F = F_f + mg\sin\theta$$
$$= 240\,\text{N} + 1500\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot \sin 30^\circ$$
$$= \underline{7600\,\text{N}}$$

Siden kraft og hastighet har samme retning, blir effekten

$$P = F \cdot v = 7600\,\text{N} \cdot 0.50\,\text{m/s} = 3800\,\text{W}\,.$$

I dagligtalen brukes ofte andre enheter på energi og effekt enn Joule og Watt. En vanlig energienhet er *kilowatt-timer* (kWh), der $1\,\text{kWh} = 1000\,\text{W} \cdot 3600\,\text{s} = 3.60 \cdot 10^6\,\text{J}$. En annen seiglivet energienhet er *kilokalori* (kCal), der 1 Cal opprinnelig ble definert litt upresist som den varmemengden (energien) som må til for å varme opp 1 gram vann 1 grad Celsius. I dag vet vi at denne varmemengden avhenger litt av vannets temperatur, men vi gjør ikke noen stor feil dersom vi sier at $1\,\text{kCal} = 4185\,\text{J}$. Vær obs. på at noen ganger "glemmer" vi *k*-en i kCal, og snakker om "kalorier" når vi egentlig mener kCal.

Bilinteresserte personer er meget interesserte i hvor mange *hestekrefter* (hp) en motor yter. Opprinnelig ble 1 hp definert som effekten når en masse på 75.0 kg ble løftet 1.00 m rett opp på 1.00 sekund. Dette innebærer da at

$$1\,\text{hp} = \frac{75.0\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2}{1.00\,\text{s}} = 736\,\text{W}\,.$$

Oppgaver: 4.7.1.

*4.8. Mer generelle utledninger.

I kapitlene foran har vi sett på begrepet "arbeid" og definert noen svært nyttige begreper. Vi har også benyttet disse begrepene til å formulere en viktig regel om bevaring av energi. Men vi har begrenset oss til spesielle situasjoner med konstant kraft og rettlinjet bevegelse. Nå er det på tide å vise at våre definisjoner og setninger har en mer generell gyldighet. Men da må jeg nok benytte både mer vektor-regning og mer differensial-regning enn jeg har gjort hittil.

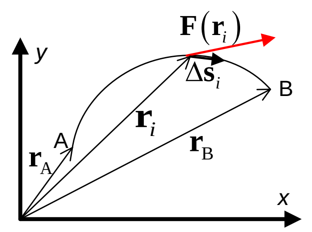
4.8.1. Generell definisjon av arbeid.

Vår opprinnelige definisjon av "arbeid" forutsatte at det er rettlinjet bevegelse, og at kraften er konstant. Vi skal nå sette opp en mer generell definisjon av begrepet "arbeid", der vi dropper både kravet om rettlinjet bevegelse og konstant kraft. Vi skal tillate at kraften varierer med *posisjonen*, men skal ikke tillate at kraften varierer med *tiden*.

Legg merke til at ved å bruke definisjonen av skalarproduktet av to vektorer **F** og **s**, kan vår foreløpige definisjon av "arbeid" skrives

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$$

fordi $\mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = |\mathbf{F}|\cdot|\mathbf{s}|\cdot\cos\theta = F\cdot s\cdot\cos\theta$.



Vi antar nå at en partikkel flytter seg langs en eller annen kurve i rommet fra et punkt A gitt ved posisjonsvektoren $\mathbf{r}_A$ til et annet punkt B gitt ved $\mathbf{r}_B$. Under denne forflytningen påvirkes partikkelen av en *varierende* kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ (d.v.s. at kraften avhenger av hvor partikkelen er, og varierer ikke med tiden).

Vi kan nå tenke oss at partikkelens bane deles opp i *n* små, rettlinjede intervaller $\Delta\mathbf{s}_1$, $\Delta\mathbf{s}_2$, …, $\Delta\mathbf{s}_n$, der hvert intervall er så lite at kraften er tilnærmet konstant innenfor hvert intervall. Innenfor hvert intervall utfører kraften et arbeid som er tilnærmet gitt ved

$$\Delta W_i \approx \mathbf{F}(\mathbf{r}_i)\cdot\Delta\mathbf{s}_i\,.$$

Et tilnærmet uttrykk for det totale arbeidet som utføres under hele forflytningen fra A til B blir derfor summen av alle disse bidragene:

$$W \approx \sum \Delta W_i \approx \sum \mathbf{F}(\mathbf{r}_i)\cdot\Delta\mathbf{s}_i$$

der vi summerer fra A til B. Jo mindre vi gjør intervallene $\Delta\mathbf{s}_1$, $\Delta\mathbf{s}_2$, …, $\Delta\mathbf{s}_n$, d.v.s. jo større *n* blir, jo bedre blir tilnærmingen. Når $n \to \infty$, kan summen erstattes av et integral. Vi får da vår generelle definisjon av arbeid:

> Det arbeidet som kraften $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ utfører under en forflytning fra A til B er
>
> $$W = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{s}$$
>
> der $d\mathbf{s}$ er et bue-element langs banen fra A til B.

4.8.2. Mer om kinetisk energi.

Da vi utledet at det arbeidet som en kraft utførte på et legeme var lik endringen av legemets kinetiske energi, forutsatte vi at kraften var konstant og at bevegelsen var rettlinjet. Vi skal nå vise at denne sammenhengen gjelder selv om vi dropper kravene om konstant kraft og rettlinjet bevegelse.

Vi tar utgangspunkt i en partikkel med masse *m* som starter i et punkt A og beveger seg til et annet punkt B under påvirkning av en kraftsum $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Det arbeidet som denne kraftsummen utfører blir da

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = m\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} .$$

Nå må vi dekomponere både $d\mathbf{v}$ og $d\mathbf{r}$ langs *x*-, *y*- og *z*-aksene. Da blir

$$d\mathbf{v} = dv_x\hat{\mathbf{i}} + dv_y\hat{\mathbf{j}} + dv_z\hat{\mathbf{k}}$$

og

$$d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}} .$$

Dermed blir arbeidet

$$W = m\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{dv_x\hat{\mathbf{i}} + dv_y\hat{\mathbf{j}} + dv_z\hat{\mathbf{k}}}{dt} \cdot \left(dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}\right).$$

Så benytter vi at

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

mens

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 .$$

Da blir

$$\begin{aligned} W &= m\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \left(\frac{dv_x}{dt}dx + \frac{dv_y}{dt}dy + \frac{dv_z}{dt}dz \right) = m\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \left(dv_x\frac{dx}{dt} + dv_y\frac{dy}{dt} + dv_z\frac{dz}{dt} \right) \\ &= m\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \left(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z \right) = m \cdot \left[\tfrac{1}{2}v_x^{\ 2} + \tfrac{1}{2}v_y^{\ 2} + \tfrac{1}{2}v_z^{\ 2} \right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \\ &= \tfrac{1}{2}m\left[v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2} + v_z^{\ 2} \right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = \tfrac{1}{2}m\left[v^2\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^{\ 2} - \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^{\ 2}}} \end{aligned}$$

Dermed ser vi at det resultatet som vi kom fram til for rettlinjet bevegelse og konstant kraft gjelder selv om vi dropper disse forutsetningene.

4.8.3. Potensiell energi i tyngdefeltet.

Vi skal nå vise at uttrykket for potensiell energi i tyngdefeltet gjelder selv om vi ikke har rettlinjet bevegelse. Vi legger da et 3-dimensjonalt koordinatsystem med *x*- og *y*-akser horisontalt og *z*-akse vertikalt oppover som figuren nedenfor viser.

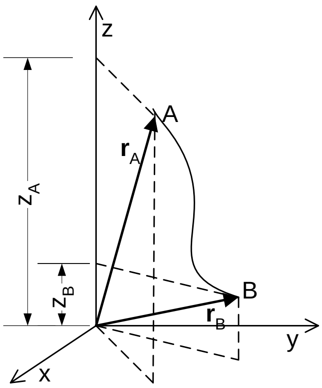
En partikkel med masse *m* beveger seg fra startpunktet A til sluttpunktet B. Da er tyngden hele tiden

$$\mathbf{G} = -mg\,\hat{\mathbf{k}} .$$

Et vilkårlig punkt i banen har posisjonsvektor

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$$

slik at et lite bue-element langs banen blir



$$d\mathbf{r} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Det arbeidet som tyngdekraften utfører, er derfor

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \left(-mg\,\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}\right) \\ &= \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} -mg\,dz = -mg\left[z\right]_{z_A}^{z_B} \\ &= \underline{\underline{-mgz_B + mgz_A}} \end{aligned}$$

Under veis har jeg benyttet at $\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$ og at $\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$. Dessuten ser jeg at når jeg setter inn grensene, er det kun er *z*-verdien av posisjonen som har betydning. Dette er det samme uttrykket som vi har funnet før, men nå har vi droppet kravet om rettlinjet bevegelse.

4.8.4. Energibevaring.

Nå er det igjen tid for en sammenfatning. Vi har altså vist at arbeidet som en kraftsum $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ utfører, er

$$W = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}mv_B{}^2 - \tfrac{1}{2}mv_A{}^2\,.$$

Kraftsummen $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ kan være satt sammen av tyngde, friksjon, fjærkrefter og eventuelle andre krefter. Vi har også sett på bidragene fra hver av disse kreftene, og funnet at de uttrykkene som vi kom fram til tidligere for spesielle situasjoner faktisk gjelder generelt. Da kan vi konkludere som før (med en liten generalisering):

Bevaring av mekanisk energi:

$$\tfrac{1}{2}mv_A{}^2 + mgy_A + \tfrac{1}{2}kx_A{}^2 - \int_A^B F_f(r)\cdot ds + \int_A^B \mathbf{F}_{\text{andre}}\cdot d\mathbf{s} = \tfrac{1}{2}mv_B{}^2 + mgy_B + \tfrac{1}{2}kx_B{}^2\,.$$

Generaliseringen går ut på at vi ikke lenger forutsetter at friksjonskraften er konstant, og vi setter også opp et uttrykk for det arbeidet som andre krefter utfører.

Energibegrepet er et av de mest fruktbare begrepene vi har i fysikken. Vi har nemlig mange andre former for energi, så som varme, elektrisk energi og kjemisk energi. Dersom vi tar hensyn til alle slike energiformer, kommer vi fram til et svært viktig resultat:

Energi kan aldri skapes eller forsvinne, bare gå over til andre former.

Denne loven kan ikke bevises. Men man har aldri funnet noe eksempel på at loven ikke stemmer.

Dessverre er ikke alle energiomforminger like lett å gjennomføre. I varmelæra skal vi etter hvert komme fram til retningslinjer for hvilke omforminger som er mulige. Det viser seg blant annet at det ikke er mulig å innrette seg slik at varme fullstendig kan omformes til for eksempel mekanisk energi. Derimot er det fullt mulig å omforme mekanisk energi til varme. Når en bil bråbremser, ser du gjerne svarte spor i asfalten. Det er gummi fra dekkene og asfalt som er smeltet, og viser at kinetisk energi er gått over til varme. Men du kan ikke få bilen til å bevege seg ved å varme opp dekkene på bilen.

*4.9. Konservative krefter, potensial.

Tyngdekraften har en viktig egenskap: Det arbeidet som denne kraften utfører, kan uttrykkes som endring av en potensiell energi. Denne potensielle energien er kun avhengig av start- og sluttpunkt for bevegelsen. Merk spesielt at dersom legemet kommer tilbake til startpunktet, er endringen av potensiell energi lik null.

Kraften i ei fjær har også denne egenskapen. Også her kan vi uttrykke arbeidet som fjærkraften utfører som en endring i en potensiell energi. Da er det naturlig å spørre om det fins andre typer krefter som har denne nyttige egenskapen? Svare er *JA*. Et eksempel er krefter i elektriske felt.

For å avgjøre om en kraft har denne egenskapen, har vi innført denne definisjonen:

Vi sier at en kraft er ***konservativ*** dersom det arbeidet som kraften utfører når den virker fra et startpunkt A til et sluttpunkt B kun avhenger av posisjonene til A og B, og er uavhengig av banen fra A til B.

En konsekvens av denne definisjonen er at når kraften virker langs en *vilkårlig* bane fra et punkt og tilbake til det samme punktet, utfører ikke kraften noe arbeid. Vi burde kanskje kalt kraften *konserverende* istedenfor *konservativ* fordi den bevarer (konserverer) mekanisk energi, men vi skal ikke prøve å endre en innarbeidet terminologi.

Til enhver konservativ kraft kan det knyttes et ***potensial*** slik at det arbeidet som kraften utfører kan uttrykkes som endring av potensiell energi. Dette gjør det enkelt å sette opp energilikninger der slike krefter inngår.

For det en-dimensjonale tilfellet har vi:

Dersom vi kjenner et potensial $V(x)$, er den tilhørende konservative kraften F gitt ved

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(\xi)\,d\xi \,.$$

I det generelle tre-dimensjonale tilfellet må vi ty til partielle deriverte og linje-integral, noe som krever matematikk-kunnskaper som jeg ikke vil forutsette at dere har.

Friksjon er et eksempel på en kraft som ikke er konservativ. De fleste ikke-konservative krefter fører til at den mekaniske energien avtar. Vi sier derfor at slike krefter er ***dissipative***.

Men det betyr ikke at energien forsvinner. Det betyr at energien går over til andre former, som regel *varme*.

Eksempel 4.9.1: Til ei elastisk fjær kan vi knytte potensialet

$$V(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 .$$

Finn den tilhørende konservative kraften.

Løsning:

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right) = \underline{\underline{-kx}} .$$

Dette stemmer med det vi vet om at når ei fjær er strukket eller sammenpresset en strekning x fra likevekt, vil fjæra virke på omgivelsene med en kraft $F = -kx$.

4.10. Sammendrag.

Symbol:	***Norsk betegnelse:***	***Engelsk betegnelse:***
W	arbeid, energi	work, energy
P	effekt	power

Arbeid $W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

Ved rettlinjet bevegelse med konstant kraft reduseres dette til $W = F \cdot s \cdot \cos\theta$ der θ er vinkelen mellom kraftretningen og bevegelsesretningen.

Kinetisk energi $W_{\mathrm{kin}} = \tfrac{1}{2}mv^2$.

Potensiell energi i tyngdefeltet: $W_{\mathrm{pot}} = mgh$.

Ei fjær som følger Hookes lov, $F = kx$ der x er forlengelsen fra likevekt har potensiell energi

$$W_{\mathrm{pot}} = \tfrac{1}{2}kx^2 .$$

Loven om bevaring av mekanisk energi: $W_{\mathrm{kin,\,A}} + W_{\mathrm{pot,\,A}} + \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = W_{\mathrm{kin,\,B}} + W_{\mathrm{pot,\,B}}$.

En friksjonskraft F_f utfører alltid et negativt arbeid $W_f = -F_f \cdot s$.

Effekt $P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = F \cdot v$.

4.11. Oppgaver med løsninger.

4.11.1. Småoppgaver i teksten.

Oppgave 4.1.1:
Hvor mye arbeid utfører du når du løfter en pakke som har massen 10 kg opp på ei bagasjehylle 1.80 m over golvet? Gå ut fra at du løfter med konstant fart.

Oppgave 4.1.2:
En mann bærer en koffert som har massen 10 kg en strekning på 100 m. Han går med konstant fart. Hvor mye arbeid utfører mannen, og hvor mye arbeid utfører tyngdekraften, i disse situasjonene:

a) Mannen bærer kofferten på horisontal vei.
b) Mannen bærer kofferten ned en bakke som har helningsvinkel på 10°.
c) Mannen bærer kofferten opp en bakke som har helningsvinkel på 10°.

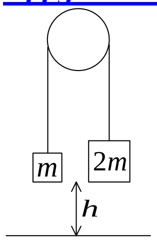
Oppgave 4.2.1:
Under en kollisjon bremses farten til en mann med masse 80 kg ned fra $20\,\mathrm{m/s}$ til $0\,\mathrm{m/s}$ over en strekning på 0.80 m. Hvor stor gjennomsnittskraft virker på mannen under kollisjonen?

Oppgave 4.2.2:
Et lite legeme med massen $m = 2.0\,\mathrm{kg}$ kastes vertikalt nedover med startfart $v_0 = 2.0\,\mathrm{m/s}$, og faller da en høyde $h = 4.0\,\mathrm{m}$. Se bort fra luftmotstand.
a) Hvor stort arbeid utfører tyngdekraften under fallet?
b) Hvor stor fart har legemet når det har falt 4.0 m?
c) Hvor stor blir farten 4.0 m under startpunktet dersom legemet kastes oppover med startfart $v_0 = 2.0\,\mathrm{m/s}$ istedenfor nedover?

Oppgave 4.4.1:
Vi går videre med eksempel 4.4.1, der vi hadde et 1.60 meter langt friksjonsfritt skråplan som dannet en vinkel på 30° med horisontalplanet. Men nå gir vi partikkelen en startfart på $5.0\,\mathrm{m/s}$ på toppen av skråplanet. Hvor stor fart har partikkelen nå ved foten av skråplanet? Spiller det noen rolle hvilken retning denne startfarten har?

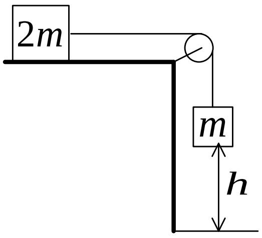
Oppgave 4.4.2:
Gå tilbake til steinen som ble kastet i oppgave 4.2.2, og beregn farten som steinen har 4.0 m under det startpunktet der steinen hadde en startfart på $v_0 = 2.0\,\mathrm{m/s}$. Vis at problemet kan løses uten å kjenne steinens masse.

Oppgave 4.4.3:



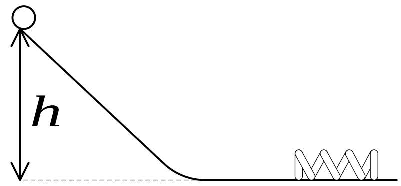
To klosser med masser henholdsvis *m* og 2*m* er festet til hver sin ende av ei masseløs snor som lagt over ei trinse slik figuren til venstre viser. Se bort fra alle former for friksjon. Klossene starter i ro. Hvor stor fart har klossene når den tyngste klossen har falt en strekning *h*? Svaret skal uttrykkes ved *h* og tyngdens akselerasjon *g*. (Det viser seg at massen *m* kan forkortes bort under regningen).

Oppgave 4.4.4:



To klosser med masser henholdsvis *m* og 2*m* er festet til hver sin ende av ei masseløs snor som lagt over ei trinse. Den største klossen ligger på et horisontalt bord, mens den minste henger fritt slik figuren til venstre viser. Se bort fra alle former for friksjon. Hvor stor fart har klossene når den minste klossen har falt en strekning *h*? Gå ut fra at den største klossen hele tiden er på bordet. Svaret skal uttrykkes ved *h* og tyngdens akselerasjon *g*. (Det viser seg at massen *m* kan forkortes bort under regningen).

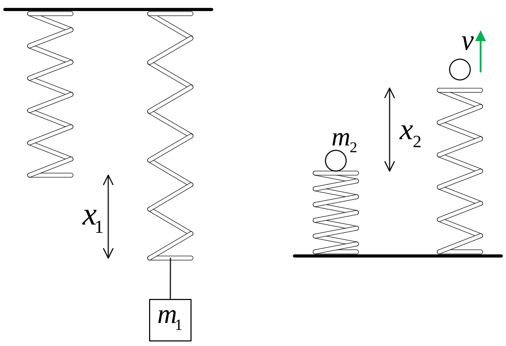
Oppgave 4.5.1:



Ei lita kule med masse $m = 0.050\,\mathrm{kg}$ slippes fra toppen av et skråplan med høyde $h = 0.40\,\mathrm{m}$, og glir uten friksjon ned til ei plan flate der kula treffer ei fjær som presses sammen 7.0 cm før kula snur. Forklar at kulas potensielle energi på toppen av skråplanet går over til potensiell energi i fjæra idet kula snur, og bruk dette til å beregne fjærkonstanten.

Oppgave 4.6.1:
En vinterdag skal du være med din lille nevø Petter i akebakken. Den er 50 m lang, og har en helningsvinkel på 20° med horisontalplanet. Friksjonstallet mellom kjelkemeiene og bakken er 0.15. Hvor stor fart får kjelken ved foten av bakken når du gir den en startfart på $3.0\,\mathrm{m/s}$ på toppen av bakken?

Oppgave 4.6.2:



a) Ei fjær med neglisjerbar masse henges opp i taket. Når fjæra belastes med en kloss med masse $m_1 = 0.150\,\mathrm{kg}$, forlenges den en strekning $x_1 = 0.12\,\mathrm{m}$. Finn fjærkonstanten.

b) Vi plasserer fjæra på et bord, legger ei lita kule med masse $m_2 = 0.008\,\mathrm{kg}$ på fjæra, presser den sammen en strekning $x_2 = 0.10\,\mathrm{m}$, og slipper. Da går kula rett opp som vist på figuren til venstre.
   1) Hvor høyt over startpunktet kommer kula?
   2) Hvor stor fart v hadde kula i det øyeblikket da den passerte fjæras likevektsposisjon?

Oppgave 4.7.1:
En skiheis skal kunne trekke 60 skiløpere opp en bakke som danner 30° med horisontalplanet. Gå ut fra at hver skiløper i gjennomsnitt har massen 90 kg (med ski og utstyr), og at friksjons-tallet mellom ski og snø er $\mu = 0.20$. Heisen skal gå med en konstant fart på $1.20\,\mathrm{m/s}$. Hvor stor effekt må motoren minst yte? Gi svaret både i kW og hp.

4.11.2. Blandede oppgaver.

Oppgave 4.1:
Du kjører på en glatt horisontal vei med en fart på 36 km/h. Du må bråbremse, og merker deg at bremsestrekningen (fra bremsene begynner å virke til bilen står helt stille) er 20.0 meter.

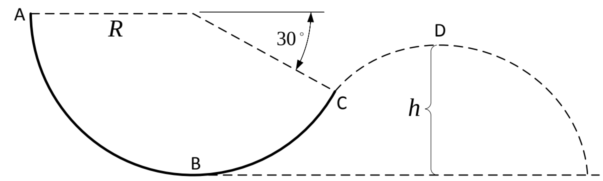
a) Hvor stort er friksjonstallet? Løs problemet både ved å bruke Newtons 2. lov og bevegelseslikninger, og ved å bruke energi.

b) Hvor lang vil bremsestrekningen bli dersom du kjører ned en bakke med helningsvinkel på 10°, og må bråbremse fra en startfart på 36 km/h? Bruk friksjonstallet fra a), og løs også dette problemet både ved å bruke Newtons 2. lov og bevegelseslikninger, og ved å bruke energi.

c) En annen bil har gamle, dårlige dekk slik at friksjonstallet mellom hans dekk og underlaget er 80% av det friksjonstallet du fant i a). Også han kjører med 36 km/h. Hvor lang bremsestrekning får han
   1) på horisontal vei?
   2) i unnabakken med helningsvinkel på 10°?
   Du kan bruke om igjen formler som du har funnet tidligere.

d) Sett opp en formel for bremselengden til en bil som kjører ned en bakke med helnings-vinkel θ, og må bråbremse fra en startfart v_0 når friksjonstallet er μ. Hvilken betingelse må være oppfylt for at formelen skal være gyldig?

Oppgave 4.2:

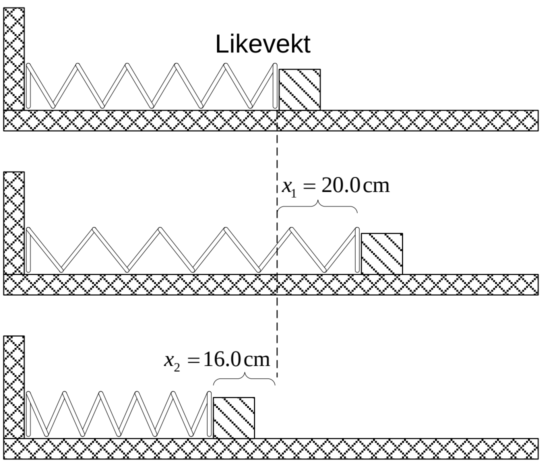


Ei friksjonsfri renne har form som et 150° utsnitt av en sirkel, og er plassert som vist på figuren til venstre. En partikkel slippes uten startfart i punktet A, forlater renna i C og fortsetter derfra i en kastebane.

Finn, uttrykt ved radien R og tyngdeakselerasjonen g:

a) Partikkelens fart i det laveste punktet B.
b) Partikkelens fart idet den forlater renna i C.
c) Partikkelens største høyde h i punktet D i kastebanen.

Oppgave 4.3:



En kloss med masse $m = 0.800$ kg er festet til den ene enden av ei fjær som har fjærkonstant $k = 98.1\,\text{N/m}$. Fjæras andre ende er festet til en vegg slik figuren til venstre viser. Klossen kan gli på et horisontalt underlag. Det er friksjon mellom klossen og underlaget.

Vi trekker klossen en strekning $x_1 = 0.200$ m til side for likevekt, og slipper klossen. Første gang klossen har passert likevekt, er klossens største utslag på den andre siden av likevekt $x_2 = 0.160\,\text{m}$. Finn friksjonstallet μ mellom klossen og underlaget. Se bort fra friksjon mellom fjæra og underlaget.

Oppgave 4.4:

Et skråplan danner en helningsvinkel på 30° med horisontalplanet. Høydeforskjellen mellom laveste og høyeste punkt på skråplanet er h.

a) En liten kloss (som vi kan betrakte som en partikkel) slippes uten startfart på toppen av skråplanet, og glir uten friksjon ned skråplanet. Finn (uttrykt ved h og tyngde-akselerasjonen g) et uttrykk for tiden som klossen trenger på å gli ned hele skråplanet.

b) I praksis vil det være friksjon mellom klossen og skråplanet. Hvor stort er friksjonstallet μ dersom klossen trenger en tid $t = 4\sqrt{\frac{h}{g}}$ på å gli ned hele skråplanet når den slippes på toppen uten startfart?

Oppgave 4.5:

I denne oppgaven skal vi se nærmere på strikkhopping. Vi har en solid strikk som er $l = 20.0$ meter lang når den ikke er strukket, og fester den til ei bru som går over en dyp kløft. En person (som vi i denne oppgaven skal betrakte som en partikkel) er festet til den andre enden av strikken. Personen slipper seg utfor, og faller fritt strikklengden på 20.0 meter før strikken begynner å strekkes. Vi skal anta at strikken oppfører seg som en spiralfjær, slik at når strikken er strukket en strekning x fra likevekt, er kraften F i strikken gitt ved

$$F = k \cdot x$$

der vi kan kalle k for "strikk-konstanten".

Sett tyngdens akselerasjon $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ i denne oppgaven, og se bort fra luftmotstand.

a) Det viser seg at når en person med masse $m = 81$ kg hopper i denne strikken, vil strikken forlenge seg $x_{\max} = 9.00$ meter før personen når det laveste punktet og begynner å svinge oppover igjen. Bruk dette til å vise at "strikk-konstanten" er $k = 580\,\mathrm{N/m}$.

b) Hvor stor akselerasjon har hopperen i det nederste punktet i banen?

c) Deretter hopper en person med masse 113 kg i den samme strikken. Hvor mye vil strikken nå forlenge seg før denne hopperen er i sitt laveste punkt?

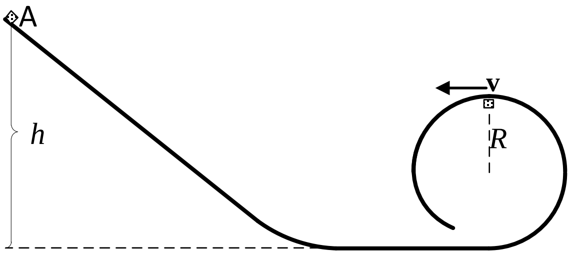
Oppgave 4.6:

En liten kloss med masse 0.500 kg ligger på et skråplan. Vi legger merke til at når skråplanet har en helningsvinkel på 31°, kan klossen gli nedover skråplanet med konstant fart.

a) Bruk denne observasjonen til å finne friksjonstallet mellom kloss og skråplan. Vi skiller ikke mellom statisk og kinetisk friksjon.

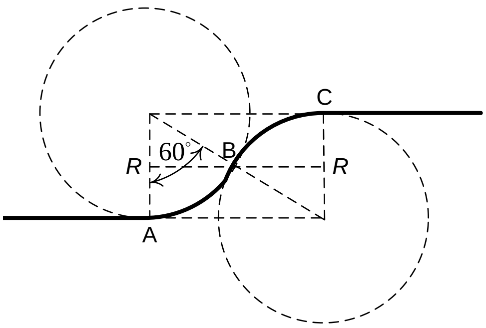
b) Mens skråplanet har denne helningsvinkelen gir du klossen en startfart v_0 rett oppover skråplanet, og ser at den da glir 0.89 meter oppover langs skråplanet før den stopper. Friksjonstallet er det samme som før. Finn startfarten v_0.

Oppgave 4.7:



En liten partikkel slippes uten startfart i topp-punktet A av ei friksjonsfri renne. I bunnen av renna går partikkelen inn i en sirkelformet loop med radius R. Finn – uttrykt ved R – hvor stor h minst må være for at partikkelen skal være i kontakt med renna idet den passerer rennas høyeste punkt.

Oppgave 4.8:

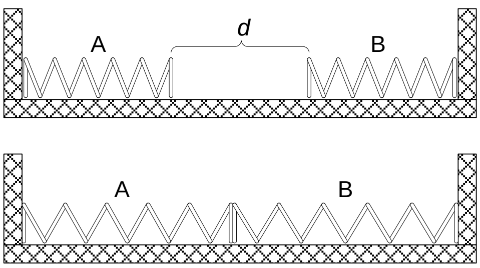


Figuren viser et vertikalsnitt av ei friksjonsløs renne. Strekningene AB og BC kan betraktes som utsnitt av hver sin sirkel med radius *R*. Sirklene tangerer hverandre i B, og er plassert slik at punktet C kommer i samme høyde som sentrum i den sirkelen som A ligger på.

En partikkel med masse *m* passerer A med fart v_A og B med fart v_B, og kommer så vidt opp til punktet C.

a) Finn v_A og v_B uttrykt ved *R* og tyngdens akselerasjon *g*.
b) Finn (uttrykt ved *m* og *g*) kraften fra renna mot partikkelen i disse punktene:
   1) Like etter at partikkelen passerte A (anta at renna fremdeles er horisontal).
   2) Like før partikkelen kommer til B (anta at renna danner en vinkel på 60° med horisontalplanet).

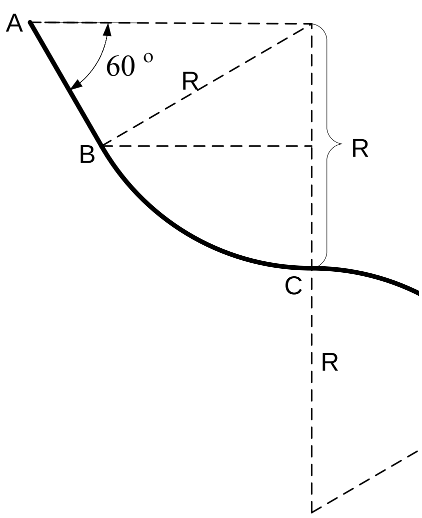
Oppgave 4.9:



To fjærer ligger på et horisontalt underlag. De er festet til hver sin vegg slik figuren nedenfor viser. Fjær A har fjærkonstant $k_A = k$ mens fjær B har fjærkonstant $k_B = \frac{3}{5}k$. Når fjærene er i likevekt, er avstanden mellom dem *d*.

Vi hekter nå fjærene sammen. Hvor mye vil hver av fjærene forlenges når fjærene er kommet til ro? Svaret skal uttrykkes ved *d*, og skal begrunnes.

Oppgave 4.10:



Figuren til venstre viser en vertikal, friksjonsløs glidebane der den rette flaten AB danner 60^o med horisontalplanet, mens BC er en del av en sirkel med radius *R*. Punktet A ligger i samme høyde som sirkelens sentrum. Nedenfor C er renna igjen en del av en sirkel med radius *R*.

En liten kloss med masse *m* slippes fra A. Svarene på spørsmålene nedenfor skal uttrykkes ved *R*, *m* og/eller *g*.

a) Bruk energiresonnement til å finne klossens fart idet den passerer B og idet den passerer C.
b) Finn kraften fra renna mot klossen
   1) like før klossen kommer til B.
   2) like etter at klossen passerte B.
   3) like før klossen kommer til C.

c) Vis at klossen forlater renna idet den passerer C.

4.11.3. Løsninger på småoppgaver i teksten.

Oppgave 4.1.1:
Når du løfter med konstant fart, må du bruke en konstant kraft F som er motsatt like stor som tyngden. Med positiv retning oppover blir størrelsen av løftekraften

$$F = mg\ .$$

Siden kraften og forflytningen har samme retning, blir arbeidet

$$W = F \cdot s = mg \cdot h = 10\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 1.80\,\text{m} = \underline{\underline{177\,\text{J}}}\ .$$

Oppgave 4.1.2:
Tyngden av kofferten har hele tiden størrelsen

$$G = mg = (10\,\text{kg}) \cdot (9.81\,\text{m/s}^2) = 98.1\,\text{N}\ .$$

Siden mannen går med konstant fart, bruker mannen en like stor kraft F med retning oppover.

a) Når mannen går på horisontal vei, er både G og F vinkelrett på bevegelsesretningen. Derfor vil verken mannen eller tyngden utføre noe arbeid.

b) Når mannen går ned bakken, blir det en vinkel på 80° mellom retningen til tyngdekraften og bevegelsesretningen. Da vil tyngden utføre et arbeid

$$W_\text{G} = G \cdot s \cdot \cos 80^\circ = (98.1\,\text{N}) \cdot (100\,\text{m}) \cdot \cos 80^\circ = \underline{\underline{1700\,\text{J}}}\ .$$

Vinkelen mellom bærekraften F og bevegelsesretningen er imidlertid 100°, slik at mannen utfører et arbeid

$$W_\text{m} = F \cdot s \cdot \cos 100^\circ = (98.1\,\text{N}) \cdot (100\,\text{m}) \cdot \cos 100^\circ = \underline{\underline{-1700\,\text{J}}}\ .$$

Mannen har utført et negativt arbeid, d.v.s. at han er tilført energi.

c) Når mannen går opp bakken, blir det en vinkel på 80° mellom retningen til bærekraften F og bevegelsesretningen. Da vil mannen utføre et arbeid

$$W_\text{G} = G \cdot s \cdot \cos 80^\circ = (98.1\,\text{N}) \cdot (100\,\text{m}) \cdot \cos 80^\circ = \underline{\underline{1700\,\text{J}}}\ .$$

Vinkelen mellom tyngdekraften og bevegelsesretningen er da 100°, slik at tyngden utfører et arbeid

$$W_\text{m} = F \cdot s \cdot \cos 100^\circ = (98.1\,\text{N}) \cdot (100\,\text{m}) \cdot \cos 100^\circ = \underline{\underline{-1700\,\text{J}}}\ .$$

Oppgave 4.2.1:
Vi benytter direkte at

$$W = F \cdot s = \tfrac{1}{2} m v_\text{B}{}^2 - \tfrac{1}{2} m v_\text{A}{}^2\ .$$

Siden sluttfarten $v_\text{B} = 0\,\text{m/s}$, gir dette

$$F \cdot s = -\tfrac{1}{2} m v_\text{A}{}^2 \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{-\tfrac{1}{2} m v_\text{A}{}^2}{s} = \frac{-\tfrac{1}{2} \cdot 80\,\text{kg} \cdot (20\,\text{m/s})^2}{0.80\,\text{m}} = \underline{\underline{-2.0 \cdot 10^4\ \text{N}}}\ .$$

Minustegnet skyldes at kraften virker mot bevegelsesretningen. Størrelsen av denne kraften er om lag 25 ganger så stor som mannens tyngde.

Oppgave 4.2.2:

a) Tyngden utfører et arbeid

$$W_\text{G} = mg \cdot h = (2.0\,\text{kg}) \cdot (9.81\,\text{m/s}) \cdot (4.0\,\text{m}) = \underline{\underline{78.5\,\text{J}}}\ .$$

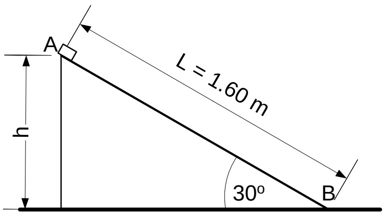
b) Vet at

$$W_G = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}mv^2 = W_G + \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

$$v^2 = \frac{2W_G}{m} + v_0^2 = \frac{2\cdot 78.5\,\mathrm{J}}{2.0\,\mathrm{kg}} + (2.0\,\mathrm{m/s})^2 = 82.5\,\mathrm{m^2/s^2} \quad \Leftrightarrow \quad v = \underline{\underline{9.1\,\mathrm{m/s}}}$$

c) Så lenge steinen beveger seg oppover, utfører tyngden et negativt arbeid på steinen. Når steinen beveger seg nedover, har tyngden utført et like stort positivt arbeid når steinen er tilbake i startpunktet slik at netto tilført arbeid blir lik null. Sluttfarten *v* blir derfor den samme uansett i hvilken retning vi kaster ut legemet.

Oppgave 4.4.1:



Legger som før nullnivå for potensiell energi gjennom B slik at $y_B = 0\,\mathrm{m}$ og $y_A = 0.80\,\mathrm{m}$. Da blir energilikningen:

$$\cancel{m}gy_A + \tfrac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 = \cancel{m}gy_B + \tfrac{1}{2}\cancel{m}v_B^2$$

$$9.81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0.80\,\mathrm{m} + \tfrac{1}{2}\cdot(5.0\,\mathrm{m/s})^2 = 9.81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0\,\mathrm{m} + \tfrac{1}{2}\cdot v_B^2$$

$$7.85\,\mathrm{m^2/s^2} + 12.5\,\mathrm{m^2/s^2} = \tfrac{1}{2}\cdot v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2\cdot(7.85+12.5)\,\mathrm{m^2/s^2}} = \underline{\underline{6.38\,\mathrm{m/s}}}$$

Det er kun størrelsen av startfarten som inngår i energilikningen, ikke retningen.

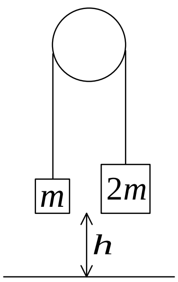
Oppgave 4.4.2:

Vi legger nullnivå for potensiell energi en høyde $h = 4.0\,\mathrm{m}$ under startpunktet. Bevaring av energi gir da

$$mgh + \tfrac{1}{2}mv_0^2 = 0 + \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh + v_0^2} = \sqrt{2\cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 4.0\,\mathrm{m} + (2.0\,\mathrm{m/s})^2} = \underline{\underline{9.1\,\mathrm{m/s}}}$$

Oppgave 4.4.3:

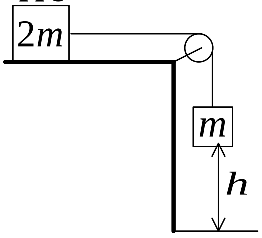


Når den tyngste klossen har falt en strekning *h*, har den letteste blitt løftet en strekning *h* slik at den befinner seg en høyde 2*h* over gulvet. Begge klossene må ha like stor fart *v* (riktignok i motsatte retninger, men det betyr ingen ting i et energi-resonnement). Vi legger nullnivå for potensiell energi i gulv-nivået, og benytter at startfarten for begge klossene er lik null. Summen av kinetisk og potensiell energi for de to klossene skal være bevart. Da får vi:

$$mgh + 0 + (2m)gh + 0 = mg(2h) + \tfrac{1}{2}mv^2 + 0 + \tfrac{1}{2}(2m)v^2$$

$$3mgh = 2mgh + \tfrac{3}{2}mv^2 \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = \tfrac{2}{3}gh \quad \Leftrightarrow \quad v = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{2}{3}gh}}}$$

Oppgave 4.4.4:

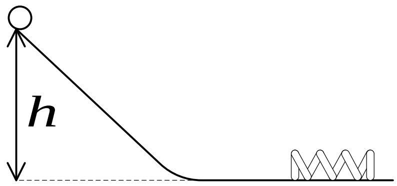


Regningene blir enklest når vi benytter at den største klossen ikke har noen endring av sin potensielle energi. (Generelt kan vi la de to klossene ha hvert sitt nullnivå for potensiell energi). Nullnivået til den minste klossen legger vi i gulvnivået. Siden begge klossene har samme fart *v*, får vi denne energilikningen:

$$0 + 0 + mgh + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}(2m)v^2 + 0 + \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$mgh = \tfrac{3}{2}mv^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{2}{3}gh}}}$$

Oppgave 4.5.1:



Siden kula slippes uten startfart, er kulas samlede mekaniske energi på toppen av skråplanet

$$W = mgh$$

der nullnivået for potensiell energi er lagt i kulas laveste nivå. Denne energien går over til kinetisk energi når kula kommer ned til flata. Men denne kinetiske energien går over til potensiell energi i fjæra når kula snur, d.v.s. når fjæra er maksimalt sammenpresset. Da har vi:

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = W_{\text{kin}} = mgh \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{2mgh}{x^2} = \frac{2\cdot 0.050\,\text{kg}\cdot 9.81\,\text{m/s}^2\cdot 0.40\,\text{m}}{\left(0.07\,\text{m}\right)^2} = \underline{\underline{80\,\text{N/m}}}\,.$$

Oppgave 4.6.1:

Bruker et energiresonnement, der jeg legger nullnivå for potensiell energi ved foten av bakken. Antar at Petter og kjelken til sammen har massen *m*. Da er

$$mgh + \tfrac{1}{2}mv_0{}^2 - F_f\cdot s = \tfrac{1}{2}mv^2\,.$$

Her er høyden

$$h = s\cdot\sin 20^\circ = \left(50\,\text{m}\right)\cdot\sin 20^\circ = 17.1\,\text{m}$$

mens friksjonskraften er

$$F_f = \mu\cdot N = \mu\cdot mg\cos 20^\circ = 0.15mg\cos 20^\circ = 0.14mg\,.$$

Setter dette inn i energilikningen, og får

$$\cancel{m}g\cdot 17.1\,\text{m} + \tfrac{1}{2}\cancel{m}\cdot\left(3.0\,\text{m/s}\right)^2 - 0.14\cancel{m}g\cdot 50\,\text{m} = \tfrac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$167.8\,\text{m}^2/\text{s}^2 + 4.5\,\text{m}^2/\text{s}^2 - 68.7\,\text{m}^2/\text{s}^2 = \tfrac{1}{2}v^2$$

$$v = \sqrt{2\cdot\left(167.8 + 4.5 - 68.7\right)}\,\text{m/s} = \underline{\underline{14.4\,\text{m/s}}}$$

Oppgave 4.6.2:

a) Når kloss og fjær er i ro, er summen av kreftene som virker på klossen lik null:

$$kx_1 - m_1g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{m_1g}{x_1} = \frac{0.150\,\text{kg}\cdot 9.81\,\text{m/s}}{0.12\,\text{m}} = \underline{\underline{12.3\,\text{N/m}}}\,.$$

b) Legger nullnivå for potensiell energi i tyngdefeltet gjennom kulas laveste posisjon. Kula kommer en høyde *h* over denne posisjonen før den snur. Siden farten er lik null både i start- og slutt-posisjonene, får vi energilikningen

$$m_2gh = \tfrac{1}{2}kx_2{}^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{\tfrac{1}{2}kx_2{}^2}{m_2g} = \frac{\tfrac{1}{2}\cdot 12.3\,\text{N/m}\cdot\left(0.10\,\text{m}\right)^2}{0.008\,\text{kg}\cdot 9.81\,\text{m/s}^2} = \underline{\underline{0.78\,\text{m}}}\,.$$

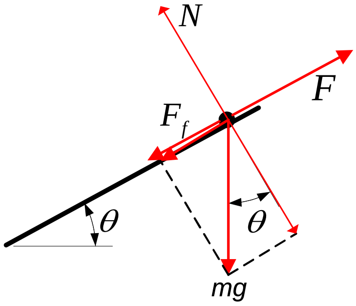
Idet kula passerer fjæras likevektsposisjon, har den en potensiell energi m_2gx_2 i forhold til nullnivået. Energilikningen blir da

$$\tfrac{1}{2}kx_2{}^2 = m_2gx_2 + \tfrac{1}{2}m_2v^2 = m_2gh\,.$$

Her er det enklest å benytte den siste likheten, siden vi da kan forkorte bort m_2:

$$gx_2 + \tfrac{1}{2}v^2 = gh \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2g\left(h - x_2\right)} = \sqrt{2\cdot 9.81\,\text{m/s}^2\left(0.78\,\text{m} - 0.10\,\text{m}\right)} = \underline{\underline{3.65\,\text{m/s}}}\,.$$

Oppgave 4.7.1:



Til venstre ser du kreftene som virker på *en* skiløper som trekkes opp bakken. Siden heisen går med konstant fart, er trekk-kraften

$$F = mg\sin\theta + \mu\cdot N = mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta$$
$$= mg\left(\sin\theta + \mu\cos\theta\right)$$
$$= 90\,\text{kg}\cdot 9.81\,\text{m/s}^2\left(\sin 30^\circ + 0.20\cdot\cos 30^\circ\right) = \underline{594\,\text{N}}$$

Med 60 skiløpere gir dette en samlet trekk-kraft på

$$60\cdot 594\,\text{N} = \underline{35\,600\,\text{N}}.$$

Motorens effekt må da minst være

$$P = F\cdot v = 35\,600\,\text{N}\cdot 1.20\,\text{m/s} = \underline{\underline{42\,700\,\text{W}}} = \underline{\underline{47.2\,\text{kW}}}.$$

Dette svarer til

$$\frac{42\,700\,\text{W}}{736\,\text{W/hp}} = \underline{\underline{58\,\text{hp}}}.$$

4.11.4. Svar på blandede oppgaver.

Oppgave 4.1:
$\mu = 0.255$; $s = 65.8\,\text{m}$; $25.0\,\text{m}$, $187.0\,\text{m}$; $\mu > \tan\theta$.

Oppgave 4.2:
$v_\text{B} = \sqrt{2gR}$; $v_\text{C} = \sqrt{gR}$; $h = \frac{7}{8}R$.

Oppgave 4.3:
$\mu = 0.25$.

Oppgave 4.4:
$t = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{h}{g}}$; $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Oppgave 4.5:
$k = 580\,\text{N/m}$; $a = 54.4\,\text{m/s}^2$; $x_2 = 11.0\,\text{m}$.

Oppgave 4.6:
$\mu = \tan\theta = 0.60$; $v_0 = 4.24\,\text{m/s}$.

Oppgave 4.7:
$h = \frac{5}{2}R$.

Oppgave 4.8:
$v_\text{A} = \sqrt{2gR}$, $v_\text{B} = \sqrt{gR}$; $F_\text{A} = 3mg$, $F_\text{B} = \frac{3}{2}mg$.

Oppgave 4.9:
$\frac{3}{8}d$, $\frac{5}{8}d$.

Oppgave 4.10:
$v_\text{B} = \sqrt{gR}$, $v_\text{C} = \sqrt{2gR}$; $N = \frac{1}{2}mg$, $N_\text{B} = \frac{3}{2}mg$, $N_\text{C} = 3mg$.