

Løsninger på blandede oppgaver.

Oppgave 4.1:

a) Jeg vet at når friksjonstallet er μ , er størrelsen av friksjonskraften

$$F_f = \mu \cdot N$$

der N er normalkraften fra underlaget. Siden bilen kjører på horisontal vei, er

$$N - mg = 0 \Leftrightarrow N = mg$$

slik at

$$F_f = \mu mg .$$

Når problemet skal løses med bevegelseslikninger, benytter vi at friksjonskraften er den eneste kraften som virker i bevegelsesretningen. Med bevegelsesretningen som positiv retning vil friksjonskraften bli negativ, slik at

$$-F_f = ma \Leftrightarrow -\mu mg = ma \Leftrightarrow \mu = \frac{-a}{g} .$$

For å finne akselerasjonen bruker jeg formelen

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \Leftrightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{(0 \text{ m/s})^2 - (10 \text{ m/s})^2}{2(20 \text{ m} - 0 \text{ m})} = \underline{\underline{-2.5 \text{ m/s}^2}} .$$

Her har jeg benyttet at $36 \text{ km/h} = 36 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 10 \text{ m/s} .$

Da blir

$$\mu = \frac{-a}{g} = \frac{-(-2.5 \text{ m/s}^2)}{9.81 \text{ m/s}^2} = \underline{\underline{0.255}} .$$

Når vi benytter energi, får vi:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - W_f = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow W_f = \frac{1}{2}mv_0^2$$

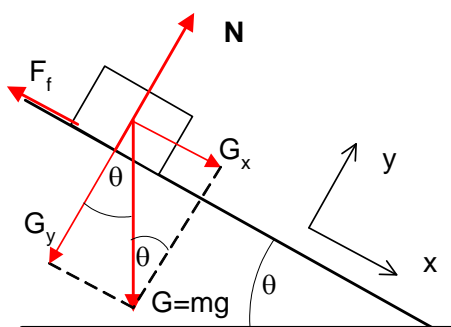
fordi $v = 0 \text{ m/s} .$ Men

$$W_f = F_f \cdot L = \mu mg \cdot L ,$$

slik at

$$\mu mgL = \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow \mu = \frac{v_0^2}{2gL} = \frac{(10 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ m}} = \underline{\underline{0.255}} .$$

b) Når du bremses i en unnbakke, har du et "friksjon-på-skråplan"-problem. Vi dekomponerer derfor kreftene som vist på figuren nedenfor til venstre, og setter opp Newtons 2. lov:



$$\begin{bmatrix} G_x - F_f \\ N - G_y \end{bmatrix} = m \cdot \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Likningen for y-komponenten gir

$$N - G_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \cos \theta .$$

Likningen for x-komponenten gir nå

$$G_x - F_f = m \cdot a .$$

Dessuten vet vi at

$$F_f = \mu N = \mu mg \cos \theta .$$

Dermed får vi

$$a = \frac{1}{m}(G_x - F_f) = \frac{1}{m}(mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta) = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \\ = 9.81 \text{ m/s}^2 (\sin 10^\circ - 0.255 \cos 10^\circ) = \underline{\underline{-0.76 \text{ m/s}^2}}$$

Finner bremsestrekningen x av formelen

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

der $x_0 = 0 \text{ m}$ er startpunktet for oppbremsingen, $v_0 = 10 \text{ m/s}$ er startfarten og $v = 0 \text{ m/s}$ er slutfarten. Jeg får

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 + \frac{1}{2a}(v^2 - v_0^2) = 0 \text{ m} + \frac{1}{2(-0.76 \text{ m/s}^2)}((0 \text{ m/s})^2 - (10 \text{ m/s})^2) = \underline{\underline{65.8 \text{ m}}}$$

Så skal vi løse problemet med å benytte energi. Med en bremsestrekning x blir høydeforskjellen mellom start- og sluttnivå for bremsestrekningen

$$h = x \sin \theta,$$

slik at når slutfarten er lik null, og nullnivået for potensiell energi legges der bilen stopper, blir energilikningen:

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 - F_f \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad mg \cdot x \sin \theta + \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mg \cos \theta \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(g \sin \theta - \mu g \cos \theta) + \frac{1}{2}v_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{1}{2}v_0^2}{g(\mu \cos \theta - \sin \theta)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (10 \text{ m/s})^2}{9.81 \text{ m/s}^2 (0.255 \cdot \cos 10^\circ - \sin 10^\circ)} = \underline{\underline{65.8 \text{ m}}}$$

c) Vår venn med dårlige dekk har et friksjonstall på

$$\mu_1 = 0.80 \cdot 0.255 = \underline{\underline{0.204}}.$$

Når vi skal beregne bremsestrekningene, er det lettest å benytte de formlene vi fant ved å benytte energi.

På horisontal vei:

$$\mu mgL = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{(10 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 0.204 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = \underline{\underline{25.0 \text{ m}}}.$$

I unnabakke blir det verre. Der fant vi at bremsestrekningen er

$$x = \frac{\frac{1}{2}v_0^2}{g(\mu \cos \theta - \sin \theta)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (10 \text{ m/s})^2}{9.81 \text{ m/s}^2 (0.204 \cdot \cos 10^\circ - \sin 10^\circ)} = \underline{\underline{187.0 \text{ m}}}$$

Vi ser at mens bremsestrekningen på horisontal vei bare øker fra 20 m til 25 m når dekkene blir litt dårligere, vil bremsestrekningen i vår unnabakke med helningsvinkel på 10° nesten tredobles fra 65.8 m til 187 m. Kanskje på tide å kjøpe nye vinterdekk?

d) Vi shopper formler fra det vi allerede har gjort, og benytter energiresonnementet. Med en bremsestrekning x blir

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 - F_f x = 0$$

der $h = x \sin \theta$ og $F_f = \mu N = \mu mg \cos \theta$. Setter inn og ordner:

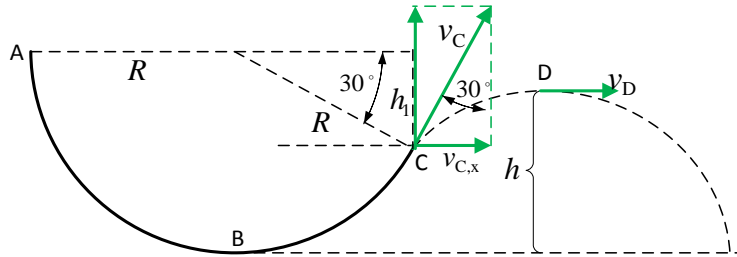
$$mg \cdot x \sin \theta + \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mg \cos \theta \cdot x = 0 \Leftrightarrow gx(\mu \cos \theta - \sin \theta) = \frac{1}{2}v_0^2$$

$$x = \frac{v_0^2}{2g(\mu \cos \theta - \sin \theta)}$$

Vi må kreve at bremsestrekningen x er positiv, slik at

$$\mu \cos \theta - \sin \theta > 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \underline{\underline{\tan \theta}}.$$

Oppgave 4.2:



- a) Legger nullnivå for potensiell energi gjennom B. Da blir energilikningen:

$$\underbrace{mg h_A}_{=R} + \frac{1}{2} \underbrace{mv_A^2}_{=0} = \underbrace{mg h_B}_{=0} + \frac{1}{2} mv_B^2$$

$$gR = \frac{1}{2}v_B^2 \Leftrightarrow v_B = \underline{\underline{\sqrt{2gR}}}.$$

- b) Nå lønner det seg å legge nullnivå for potensiell energi gjennom C. Høydeforskjellen mellom A og C er

$$h_1 = R \sin 30^\circ = \frac{1}{2}R.$$

Den mekaniske energien er den samme i C som i A, slik at

$$\underbrace{mg h_A}_{=\frac{1}{2}R} + \frac{1}{2} \underbrace{mv_A^2}_{=0} = \underbrace{mg h_C}_{=0} + \frac{1}{2} mv_C^2$$

$$\frac{1}{2}gR = \frac{1}{2}v_C^2 \Leftrightarrow v_C = \underline{\underline{\sqrt{gR}}}.$$

- c) Siden det ikke er noen akselerasjon i horisontal retning fra C til D, er

$$v_D = v_{C,x} = v_C \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{gR}.$$

Legger nullnivå for potensiell energi gjennom B. Den mekaniske energien er den samme i D som i A, slik at energilikningen blir:

$$\underbrace{mg h_A}_{=R} + \frac{1}{2} \underbrace{mv_A^2}_{=0} = mgh + \frac{1}{2} mv_D^2$$

$$gR = gh + \frac{1}{2}v_D^2 = gh + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{gR}\right)^2 = gh + \frac{1}{8}gR \Leftrightarrow h = R - \frac{1}{8}R = \underline{\underline{\frac{7}{8}R}}.$$

Oppgave 4.3:

I ytterposisjonene har klossen ingen kinetisk energi. Den potensielle energien i tyngdefeltet er like stor i begge posisjoner. Normalkraften fra underlag mot kloss er

$$N = mg$$

slik at friksjonskraften blir

$$F_f = \mu N = \mu \cdot mg.$$

Denne friksjonskraften virker over en strekning $s = x_1 + x_2$, og utfører et arbeid

$$W = F_f \cdot s = \mu mg(x_1 + x_2).$$

Da kan vi sette opp energilikningen

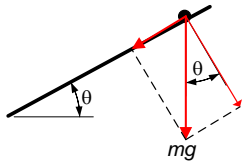
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kx_1^2 - \mu mg \cdot (x_1 + x_2) &= \frac{1}{2}kx_2^2 \\ \mu &= \frac{\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2}{mg(x_1 + x_2)} = \frac{\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)}{mg(x_1 + x_2)} = \frac{\frac{1}{2}k(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{mg(x_1 + x_2)} = \frac{k(x_1 - x_2)}{2mg} \\ &= \frac{98.1 \text{ N/m} \cdot (0.200 - 0.160) \text{ m}}{2 \cdot 0.800 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = \underline{\underline{0.25}} \end{aligned}$$

Oppgave 4.4:

Når helningsvinkelen er $\theta = 30^\circ$, og skråplanet har lengden l , blir

$$\sin \theta = \frac{h}{l} \Leftrightarrow l = \frac{h}{\sin \theta} = \frac{h}{\sin 30^\circ} = \frac{h}{\frac{1}{2}} = 2h.$$

a)



Benytter Newtons 2. lov under bevegelsen ned skråplanet.
Da er

$$mg \sin \theta = m \cdot a \Leftrightarrow a = g \sin \theta = g \sin 30^\circ = \frac{1}{2}g.$$

Når startfarten $v_0 = 0$, blir

$$l = 2h = \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{4h}{a} = \frac{4h}{\frac{1}{2}g} = 8\frac{h}{g} \Leftrightarrow t = \sqrt{8\frac{h}{g}} = \underline{\underline{2\sqrt{2}\sqrt{\frac{h}{g}}}}$$

Alternativt kan vi bruke energi for å finne farten v ved foten av skråplanet:

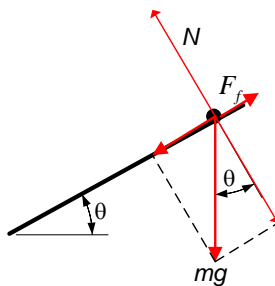
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow v^2 = 2gh \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

Når $v_0 = 0$ blir

$$v = at \Leftrightarrow a = \frac{v}{t}$$

$$l = 2h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{t} \cdot t^2 = \frac{1}{2}vt \Leftrightarrow t = \frac{4h}{v} = \frac{4h}{\sqrt{2gh}} = \underline{\underline{2\sqrt{2}\sqrt{\frac{h}{g}}}}$$

b)



Når partikkelen bruker en tid $t = 4\sqrt{\frac{h}{g}}$ ned skråplanet, blir

$$l = 2h = \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow a = \frac{4h}{t^2} = \frac{4h}{\left(4\sqrt{\frac{h}{g}}\right)^2} = \frac{4h}{16 \cdot \frac{h}{g}} = \frac{1}{4}g.$$

Friksjonskraften er gitt ved

$$F_f = \mu N = \mu mg \cos \theta.$$

Newtons 2. lov for bevegelsen på skråplanet gir nå

$$mg \sin \theta - F_f = m \cdot a \Leftrightarrow mg \sin \theta - \mu \cdot mg \cos \theta = m \cdot a$$

$$\Leftrightarrow g \cdot \frac{1}{2} - \mu g \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{4}g \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3}\mu g = \frac{1}{2}g - \frac{1}{4}g \Leftrightarrow \mu = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{3}}}}$$

Oppgave 4.5:

a) Legger nullnivå for tyngdens potensielle energi i banens laveste punkt. Siden hopperen ikke har startfart, er den mekaniske energien på toppen

$$W_{\text{topp}} = mg(x_{\text{max}} + l).$$

I det laveste punktet på banen er det heller ingen fart, slik at vi kun har potensiell energi i strikken. Denne potensielle energien er gitt ved

$$W_{\text{bunn}} = \frac{1}{2}kx_{\text{max}}^2.$$

Siden vi kan se bort fra luftmotstand, har vi at

$$W_{\text{topp}} = W_{\text{bunn}} \Leftrightarrow mg(x_{\text{max}} + l) = \frac{1}{2}kx_{\text{max}}^2$$

$$k = \frac{2mg(x_{\text{max}} + l)}{x_{\text{max}}^2} = \frac{2 \cdot (81\text{kg}) \cdot (10\text{m/s}^2) \cdot (9 + 20)\text{m}}{(9\text{m})^2} = \underline{\underline{580\text{N/m}}}$$

- b) I det nederste punktet i banen påvirkes hopperen av tyngdekraften nedover og strikkraften oppover. Med positiv retning oppover får vi:

$$F = k \cdot x_{\text{max}} - mg = (580\text{N/m}) \cdot (9.00\text{m}) - (81\text{kg}) \cdot (10\text{m/s}^2) = \underline{\underline{4410\text{N}}}.$$

Da blir akselerasjonen

$$a = \frac{F}{m} = \frac{4410\text{N}}{81\text{kg}} \approx \underline{\underline{54.4\text{m/s}^2}} \text{ (eller ca. } 5.4g\text{)}.$$

- c) For hopperen med masse $m_2 = 113\text{kg}$, blir energilikningen

$$m_2g(x_2 + l) = \frac{1}{2}kx_2^2$$

der x_2 er den nye forlengelsen av strikken. Setter inn tall (og dropper benevninger):

$$113 \cdot 10(x_2 + 20) = \frac{1}{2} \cdot 580 \cdot x_2^2$$

$$113x_2 + 2260 = 29x_2^2$$

$$29x_2^2 - 113x_2 - 2260 = 0$$

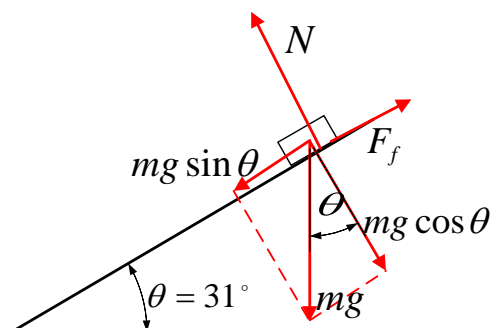
$$x_2 = \frac{113 \pm \sqrt{113^2 - 4 \cdot 29 \cdot (-2260)}}{2 \cdot 29} = \frac{113 \pm 524.3}{58}$$

Vi kan åpenbart bare bruke plusstegnet. Da får vi

$$x_2 \approx \underline{\underline{11.0\text{m}}}.$$

Oppgave 4.6:

a)



Når klossen glir nedover skråplanet, er friksjonskraften rettet oppover langs skråplanet. Når klossen ikke har akselerasjon, er

$$mg \sin \theta = F_f = \mu N = \mu mg \cos \theta$$

$$\mu = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \underline{\underline{\tan \theta}} = \underline{\underline{\tan 31^\circ}} = \underline{\underline{0.60}}.$$

- b) Problemet kan løses på to måter:

Med Newtons 2. lov: Når klossen glir oppover, virker friksjonskraften nedover langs skråplanet. Vi bruker samme figur, men snur retningen på friksjonskraften. Med positiv retning oppover får vi:

$$-mg \sin \theta - F_f = m \cdot a .$$

Setter inn at

$$F_f = \mu mg \cos \theta = \tan \theta \cdot mg \cos \theta = mg \sin \theta ,$$

og får

$$-mg \sin \theta - mg \sin \theta = m \cdot a \Leftrightarrow a = \underline{\underline{-2g \sin \theta}} .$$

Da kan vi bruke en bevegelseslikning, og husker at slutfarten $v = 0 \text{ m/s}$:

$$v^2 - v_0^2 = 2as \Leftrightarrow v_0^2 = -2as = -2(-2g \sin \theta) \cdot s$$

$$v_0 = \sqrt{4gs \cdot \sin \theta} = 2\sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2) \cdot (0.89 \text{ m}) \cdot \sin 31^\circ} = \underline{\underline{4.24 \text{ m/s}}}$$

Med energi: Høydeforskjellen mellom start- og slutt punkt er

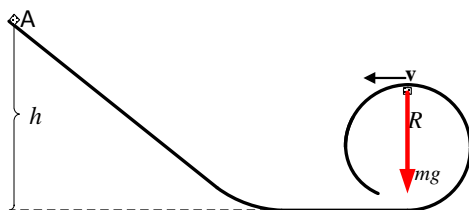
$$h = s \cdot \sin \theta .$$

Da kan vi sette opp denne energilikningen:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = F_f \cdot s + mgh = mg \sin \theta \cdot s + mg \cdot s \sin \theta = 2mgs \sin \theta$$

$$v_0^2 = 4gs \sin \theta \Leftrightarrow v_0 = \underline{\underline{4.24 \text{ m/s}}}$$

Oppgave 4.7:



Dersom partikkelen skal være i kontakt med renna i topp-punktet, må partikkelen der ha en fart v som minst er så stor at sentripetalkraften er lik tyngdekraften:

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = mg \Leftrightarrow v^2 = gR .$$

Da må partikkelen slippes fra en høyde h som minst er så stor at

$$mgh = mg \cdot 2R + \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow gh = g \cdot 2R + \frac{1}{2} \cdot gR \Leftrightarrow h = \underline{\underline{\frac{5}{2}R}} .$$

Oppgave 4.8:

a) Punktet C ligger en høyde $h = R$ høyere enn A. Når partikkelen så vidt kommer opp til C, betyr det at partikkelens kinetiske energi kan neglisjeres i C. Da er

$$mgR = \frac{1}{2}mv_A^2 \Leftrightarrow v_A = \underline{\underline{\sqrt{2gR}}} .$$

Vi ser at C ligger en høyde $h = \frac{1}{2}R$ høyere enn B. Tilsvarende resonnement gir

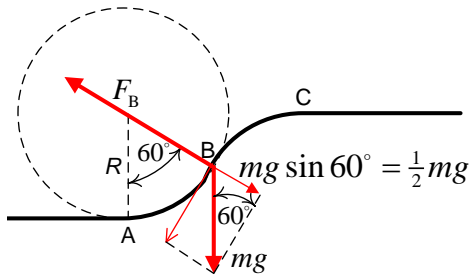
$$mg \cdot \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}mv_B^2 \Leftrightarrow v_B = \underline{\underline{\sqrt{gR}}} .$$

b) Så snart partikkelen har passert A, befinner den seg i en sirkel med radius R . Den har da en sentripetalakselerasjon

$$a_A = \frac{v_A^2}{R} = \frac{2gR}{R} = 2g$$

med retning inn mot sentrum, d.v.s. rett oppover. Vi kaller kraften fra renna mot partikkelen for F_A . Newtons 2. lov gir nå

$$F_A - mg = ma_A \Leftrightarrow F_A = mg + m \cdot 2g = \underline{\underline{3mg}}.$$



Like før partikkelen passerer B, er sentripetalakselerasjonen

$$a_B = \frac{v_B^2}{R} = \frac{gR}{R} = g.$$

Av figuren ser vi at kraften F_B fra renna mot partikkelen er gitt ved

$$F_B - \frac{1}{2}mg = m \cdot a_B$$

$$F_B = \frac{1}{2}mg + m \cdot g = \underline{\underline{\frac{3}{2}mg}}$$

Oppgave 4.9:

Når fjærene er kommet til ro, er kreftene i de to fjærene like store. Anta at A forlenges en strekning x , mens B da forlenges en strekning $d - x$. Da er

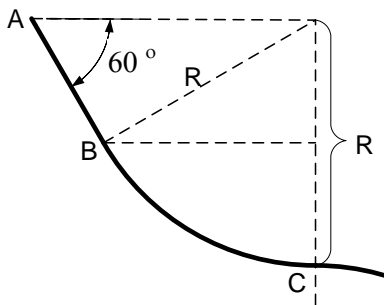
$$k_A x = k_B (d - x) \Leftrightarrow k_A x + k_B x = k_B d \Leftrightarrow x = \frac{k_B d}{k_A + k_B} = \frac{\frac{3}{5}k \cdot d}{k + \frac{3}{5}k} = \underline{\underline{\frac{3}{8}d}}.$$

Dermed vil B forlenges en strekning

$$d - x = d - \frac{3}{8}d = \underline{\underline{\frac{5}{8}d}}.$$

Oppgave 4.10:

a)



Av figuren ser vi at

$$h_{AB} = R \sin 30^\circ = \frac{1}{2}R,$$

og at

$$h_{AC} = R.$$

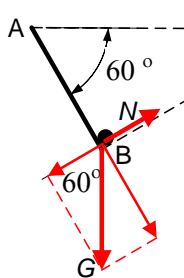
Siden klossen slippes uten startfart, får vi

$$mgh_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Leftrightarrow v_B = \sqrt{2gh_{AB}} = \sqrt{2g \cdot \frac{1}{2}R} = \underline{\underline{\sqrt{gR}}}$$

$$mgh_{AC} = \frac{1}{2}mv_C^2 \Leftrightarrow v_C = \sqrt{2gh_{AC}} = \underline{\underline{\sqrt{2gR}}}.$$

b)



Så lenge partikkelen befinner seg på den rette banestrekningen, har den ingen akselerasjon vinkelrett på banen. Da er (se figuren øverst til venstre):

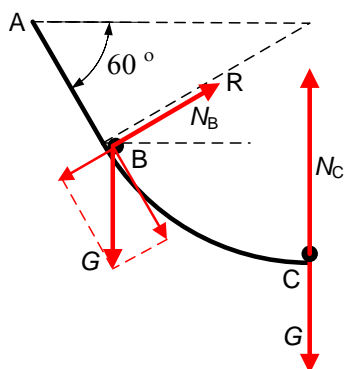
$$N - mg \cdot \cos \theta = 0 \Leftrightarrow N = mg \cos 60^\circ = \underline{\underline{\frac{1}{2}mg}}.$$

Når partikkelen er kommet over på den sirkelformede delen av banen med fart v , får den en sentripetalakselerasjon

$$a_N = \frac{v^2}{R} \text{ som har retning vinkelrett på banen. Like etter at}$$

partikkelen har passert punktet B, blir

$$N_B - mg \cdot \cos \theta = ma_N$$



$$\begin{aligned}
 N_B &= mg \cdot \cos 60^\circ + m \frac{v_B^2}{R} \\
 &= mg \cdot \frac{1}{2} + m \frac{(\sqrt{gR})^2}{R} = \frac{1}{2}mg + mg = \underline{\underline{\frac{3}{2}mg}}
 \end{aligned}$$

Like før klossen kommer til C, er den fremdeles inne i sirkelbevegelsen. Men Newtons 2. lov blir nå (se figuren ovenfor):

$$N_C - mg = ma_N = m \frac{v_C^2}{R} = m \frac{(\sqrt{2gR})^2}{R} = 2mg \quad \Leftrightarrow \quad N_C = mg + 2mg = \underline{\underline{3mg}}.$$

- c) Dersom klossen skal følge renna, må farten i C høyst være så stor at sentripetalkraften er lik tyngden, d.v.s. at

$$m \frac{v^2}{R} = mg \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{Rg}.$$

Men vi vet jo at $v_C = \sqrt{2gR}$. Da er farten for stor til at klossen vil følge renna.