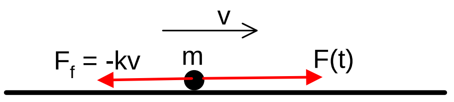
Mer om bevegelse ved viskøs friksjon.

Vi skal nå sette opp bevegelseslikninger når friksjonskraften F_f er gitt ved

$$F_f = -k \cdot v$$

der k er en konstant som avhenger av legemets størrelse og form, og av den væsken eller gassen som legemet beveger seg gjennom. Dette fører til differensiallikninger.



Vi antar at et legeme med masse m trekkes gjennom en gass eller væske med en kraft $F(t)$, der t er tid. Newtons 2. lov blir nå

$$F(t) + F_f = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad F(t) - k \cdot v = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = \frac{1}{m} F(t).$$

Dette er en lineær 1.ordens differensiallikning, som løses med formel. Vi får:

$$v(t) = e^{-\frac{k}{m}t} \left(\int \tfrac{1}{m} \cdot F(t) e^{\frac{k}{m}t} dt + C \right)$$

der C er en konstant som finnes av startbetingelsene.

Jeg vil anbefale at du ikke bruker formelen over slavisk. Du bør alltid tegne en figur og sette opp Newtons 2. lov for hver enkelt situasjon. Noen ganger viser det seg at vi får en separabel differensiallikning, som er enklere å løse enn en lineær 1.ordens. Når vi kjenner $v(t)$, kan vi finne tilbakelagt strekning x ved å løse differensiallikningen

$$v(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Eksempel 1: En liten båt går med konstant fart v_0 når motoren plutselig stopper.

a) Finn en formel for båtens fart $v(t)$ etter at motoren er stoppet uttrykt ved k, båtens masse m og opprinnelig fart v_0.

b) Finn k når du vet at båtens masse er $m = 1000\,\text{kg}$ og opprinnelig fart var $v_0 = 8.0\,\text{m/s}$, og du oppdager at 10 sekunder etter at motoren stoppet var båtens fart er redusert til $v = 5.0\,\text{m/s}$.

c) Hvor langt går båten før den stopper helt?

Løsning:

a) Når motorkraften bortfaller, er $F(t) = 0$. Da blir Newtons 2. lov

$$F_f = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad -k \cdot v = m \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Jeg synes det er enklest å oppfatte denne likningen som separabel (ikke lineær 1.ordens):

$$-k \cdot v = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{k}{m} dt = \frac{dv}{v} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{k}{m} \int dt = \int \frac{dv}{v}$$

$$-\frac{k}{m} [t]_0^t = [\ln v]_{v_0}^v \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{k}{m} t = \ln v - \ln v_0 = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

$$\frac{v}{v_0} = e^{-\frac{k}{m}t} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}}}.$$

b) Vet at $v(0)=v_0=8.0\,\text{m/s}$, og at $v(10)=5.0\,\text{m/s}$. Setter inn i formelen for $v(t)$:

$$v(10)=v_0e^{-\frac{k}{m}\cdot 10s} \quad\Leftrightarrow\quad 5.0\,\text{m/s}=8.0\,\text{m/s}\cdot e^{-\frac{k}{1000\,\text{kg}}\cdot 10\text{s}} \quad\Leftrightarrow\quad e^{-\frac{k}{100}\text{s/kg}}=\frac{5.0}{8.0}=0.625$$

$$\Leftrightarrow\quad -\frac{k}{100}\text{s/kg}=\ln 0.625=-0.47 \quad\Leftrightarrow\quad k=\underline{\underline{47\,\text{kg/s}}}.$$

c) For å finne hvor langt båten går før den stopper, må vi først finne en formel for $x(t)$. Det gjøres slik:

$$v(t)=\frac{dx}{dt} \quad\Leftrightarrow\quad v_0e^{-\frac{k}{m}t}=\frac{dx}{dt} \quad\Leftrightarrow\quad dx=v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt$$

$$\int dx=\int v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt \quad\Leftrightarrow\quad [x]_{x_0}^{x}=v_0\left(-\frac{m}{k}\right)\left[e^{-\frac{k}{m}t}\right]_0^t \quad\Leftrightarrow\quad x-x_0=-\frac{m}{k}v_0\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \underline{x=x_0+\frac{m}{k}v_0\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)}.$$

Her legger vi merke til at når $t\to\infty$, vil $e^{-\frac{k}{m}t}\to 0$. Da vil

$$x\to x_0+\frac{m}{k}v_0(1+0)=0\,\text{m}+\frac{1000\,\text{kg}}{47\,\text{kg/s}}\cdot 8.0\,\text{m/s}=\underline{\underline{170\,\text{m}}}.$$

Dette viser at etter lang tid vil båten stoppe 170 meter fra det stedet der motoren stoppet.

Til slutt skal vi se på hva som skjer dersom friksjonskraften er gitt ved $F_f=-k_2v^2$.

Eksempel 2: Et legeme med masse $m=20\,\text{kg}$ beveger seg rettlinjet gjennom et fluid. Vi observerer at terminalfarten er $v_0=4.0\,\text{m/s}$ når legemet påvirkes av en konstant kraft $F_0=72\,\text{N}$ i tillegg til en friksjonskraft F_f som virker mot fartsretningen.

a) Anta at friksjonskraften er gitt ved $F_f=-k_1v$.
Bestem k_1, og finn $v(t)$ når $v(0)=0$.

b) Anta at friksjonskraften er gitt ved $F_f=-k_2v^2$.
Bestem k_2, og finn $v(t)$ når $v(0)=0$.
Hint: Det kan lønne seg å innføre en ny variabel $u=4-v$.

c) Anta at friksjonskraften er gitt ved $F_f=-k_1v-k_2v^2$.
For å finne k_1 og k_2, reduserer vi den konstante kraften til $\frac{2}{3}F_0=48\,\text{N}$, og ser at da blir terminalfarten $3.0\,\text{m/s}$. Bruk disse opplysningene til å finne k_1 og k_2.
Finn deretter $v(t)$ når $F_0=72\,\text{N}$.
Hint: Det kan lønne seg å innføre en ny variabel $u=4-v$.
Tegn til slutt grafene til $v(t)$ i de tre tilfellene i samme koordinatsystem.

Løsning: I alle de tre tilfellene blir

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F_0 + F_f \,.$$

Terminalfarten framkommer når

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_f = -F_0 = -72\,\mathrm{N}\,.$$

a) Når $F_f = -k_1 v$, og terminalfarten er $v_0 = 4.0\,\mathrm{m/s}$, får vi (når vi dropper benevninger):

$$-k_1 \cdot 4.0 = -72 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = \underline{\underline{18}}\,.$$

Da blir differensiallikningen

$$20 \cdot \frac{dv}{dt} = 72 - 18v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = 3.6 - 0.9v = -0.9(v-4) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{v-4} = -0.9dt$$

Integrerer begge sider:

$$\ln|v-4| = -0.9t + C\,.$$

Av problemstillingen er det opplagt at $0 \le v < 4$. Finner C av startbetingelsen:

$$\ln|4-0| = -0 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = \ln 4\,.$$

Da blir

$$\ln(4-v) = -0.9t + \ln 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - v = 4e^{-0.9t} \quad \Leftrightarrow \quad v(t) = \underline{\underline{4\left(1-e^{-0.9t}\right)}}\,.$$

b) Når $F_f = -k_2 v^2$, og terminalfarten er $v_0 = 4.0\,\mathrm{m/s}$, får vi (når vi dropper benevninger):

$$-k_2 \cdot 4.0^2 = -72 \quad \Leftrightarrow \quad k_2 = \tfrac{72}{16} = \underline{\underline{\tfrac{9}{2}}}\,.$$

Da blir differensiallikningen

$$20 \cdot \frac{dv}{dt} = 72 - \tfrac{9}{2}v^2\,.$$

Innfører

$$u = 4 - v \quad \Leftrightarrow \quad v = 4 - u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = -\frac{dv}{dt}\,,$$

og får

$$-20 \cdot \frac{du}{dt} = 72 - \tfrac{9}{2}(4-u)^2 = 72 - \tfrac{9}{2}\left(16 - 8u + u^2\right) = 36u - \tfrac{9}{2}u^2$$

$$-40\frac{du}{dt} = 72u - 9u^2 = -9u(u-8) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dt} = \tfrac{9}{40}u(u-8) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{u(u-8)} = \frac{9}{40}dt\,.$$

Delbrøkoppspalter venstre side, og får

$$\frac{1}{u(u-8)} = -\frac{\frac{1}{8}}{u} + \frac{\frac{1}{8}}{u-8}$$

som gir

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u-8}\right)du = \frac{9}{40}dt \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u-8}\right)du = -\frac{9}{5}dt$$

Integrerer begge sider:

$$\ln|u| - \ln|u-8| = -\tfrac{9}{5}t + C \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{u}{8-u}\right) = -\tfrac{9}{5}t + C$$

der jeg benytter at siden $0 \le v < 4$ må $0 < u \le 4$. Setter inn for v og finner C:

$$\ln\left(\frac{4-v}{8-(4-v)}\right)=\ln\left(\frac{4-v}{4+v}\right)=-\tfrac{9}{5}t+C \quad\Leftrightarrow\quad C=\ln\left(\frac{4-0}{4-0}\right)=0\,.$$

Da blir

$$\frac{4-v}{4+v}=e^{-\frac{9}{5}t} \quad\Leftrightarrow\quad 4-v=(4+v)e^{-\frac{9}{5}t} \quad\Leftrightarrow\quad v(t)=\underline{\underline{\frac{4\left(1-e^{-\frac{9}{5}t}\right)}{1+e^{-\frac{9}{5}t}}}}\,.$$

c) Når $F_f=-k_1v-k_2v^2$, og terminalfarten er $v_0=4.0\,\mathrm{m/s}$, får vi (når vi dropper benevninger):

$$-k_1\cdot 4.0-k_2\cdot 4.0^2=-72 \quad\Leftrightarrow\quad k_1+4k_2=18\,.$$

Når den konstante kraften er $\tfrac{2}{3}F_0=48\,\mathrm{N}$, og terminalfarten er $v_0=3.0\,\mathrm{m/s}$, får vi (når vi dropper benevninger):

$$-k_1\cdot 3.0-k_2\cdot 3.0^2=-48 \quad\Leftrightarrow\quad k_1+3k_2=16\,.$$

Trekker den nederste likningen fra den øverste, og får

$$k_2=\underline{\underline{2}}$$

som videre gir

$$k_1=16-3k_2=16-3\cdot 2=\underline{\underline{10}}\,.$$

Da blir differensiallikningen

$$20\cdot\frac{dv}{dt}=72-10v-2v^2\,.$$

Innfører

$$u=4-v \quad\Leftrightarrow\quad v=4-u \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dt}=-\frac{dv}{dt}\,,$$

og får

$$-20\cdot\frac{du}{dt}=72-10(4-u)-2(4-u)^2=72-(40-10u)-2\left(16-8u+u^2\right)=26u-2u^2$$

$$\frac{du}{dt}=\tfrac{1}{10}u^2-\tfrac{13}{10}u=\tfrac{1}{10}u(u-13) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{du}{u(u-13)}=\frac{1}{10}dt\,.$$

Delbrøkoppspalter venstre side, og får

$$\frac{1}{u(u-13)}=-\frac{\frac{1}{13}}{u}+\frac{\frac{1}{13}}{u-13}$$

som gir

$$-\frac{1}{13}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u-13}\right)du=\frac{1}{10}dt \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u-13}\right)du=-\frac{13}{10}dt\,.$$

Integrerer begge sider:

$$\ln|u|-\ln|u-13|=-\tfrac{13}{10}t+C \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left(\frac{u}{13-u}\right)=-\tfrac{13}{10}t+C$$

der jeg benytter at siden $0\le v<4$ må $0<u\le 4$. Setter inn for *v* og finner *C*:

$$\ln\left(\frac{4-v}{13-(4-v)}\right)=\ln\left(\frac{4-v}{9+v}\right)=-\tfrac{10}{13}t+C \quad\Leftrightarrow\quad C=\ln\frac{4}{9}\,.$$

Da blir

$$\frac{4-v}{9+v}=\tfrac{4}{9}e^{-\frac{13}{10}t} \quad \Leftrightarrow \quad 4-v=\left(4+\tfrac{4}{9}v\right)e^{-\frac{13}{10}t} \quad \Leftrightarrow \quad 4\left(1-e^{-\frac{13}{10}t}\right)=\left(1+\tfrac{4}{9}e^{-\frac{13}{10}t}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad v(t)=\underline{\underline{\frac{4\left(1-e^{-\frac{13}{10}t}\right)}{1+\frac{4}{9}e^{-\frac{13}{10}t}}}}$$

Figuren nedenfor viser $v(t)$ i de tre tilfellene, med tilfelle c) i midten.