Doserte svinger.

På moderne veier er ikke veibanen horisontal i svinger. Der er veibanen dosert slik at veibanen er høyere i yttersving enn i innersving. Dette motvirker at biler skrenser ut av veien på glatt føre. I neste eksempel skal vi se nærmere på slik dosering.

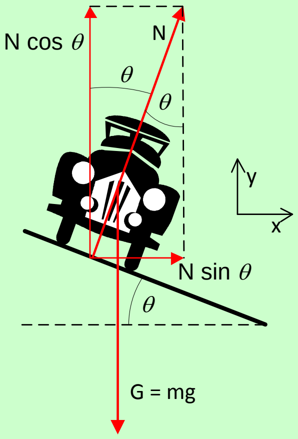
Eksempel: En vei-ingeniør vil dosere en sving med svingradius $R = 100\,\text{m}$ slik at en bil som kjører i 60 km/h skal kunne komme gjennom svingen uten skrens uansett hvor glatt det er.

a) Hvor stor må helningsvinkelen innover i svingen (doseringsvinkelen) da være?

b) Mellom hvilke grenser må farten til en bil da være for å unngå å gli når friksjonstallet mellom bilhjul og veibane er $\mu = 0.20$?

Løsning: Her må vi ta en figur til hjelp:

a)



Doseringsvinkelen er θ. Vårt første problem er å legge inn et fornuftig koordinatsystem for dekomponering av krefter. Siden bilen kjører i en horisontal sving, er sentripetal-akselerasjonen rettet horisontalt innover i svingen. Da er det naturlig å dekomponere med en *x*-komponent horisontalt inn mot svingens sentrum og en *y*-komponent vertikalt med retning oppover som vist på figuren.

Legg merke til at det ikke er tegnet inn noen friksjonskrefter på figuren. Det innebærer at det kun er *x*-komponenten av normalkraften som gir sentripetalakselerasjon.

I *x*-retningen får vi da:

$$N \sin\theta = m \cdot a_N \,.$$

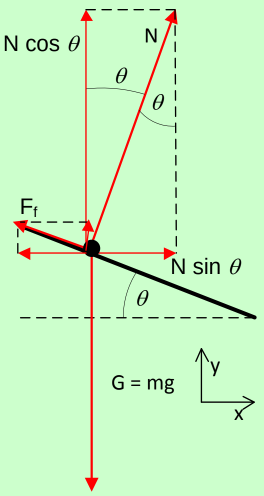
I *y*-retningen får vi:

$$N\cos\theta - mg = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N = \frac{mg}{\cos\theta}\,.$$

Så setter jeg uttrykket for *N* inn i likningen for sentripetalakselerasjon:

$$\frac{\cancel{m}g}{\cos\theta}\cdot\sin\theta = \cancel{m}\,\frac{v^2}{R} \quad\Leftrightarrow\quad \tan\theta = \frac{v^2}{Rg} = \frac{\left(60\cdot\frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}}\right)^2}{100\,\text{m}\cdot 9.81\text{s}} = 0.283 \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \underline{\underline{15.8^\circ}}\,.$$

b)



Nå er det ikke alle biler som kjører med nøyaktig 60 km/h gjennom svingen. Dersom bilen kjører saktere, må det være en friksjonskraft som hindrer bilen i å gli ned i den doserte veibanen. Vi får da den situasjonen som er vist på figuren til venstre, der bilen er erstattet av et massepunkt. Vi dekomponerer kreftene i *x*- og *y*-retning som før:

x-retning: $\quad N\sin\theta - F_f\cos\theta = m\cdot a_N\,.$

y-retning: $\quad N\cos\theta + F_f\sin\theta - mg = 0\,.$

Vi ønsker å finne den minste farten *v* som bilen kan ha uten å gli ned doseringen. Da har friksjonskraften F_f sin største verdi, som er

$$F_f = \mu N\,.$$

Vi setter inn dette uttrykket i de dekomponerte kraftlikningene:

$$N\sin\theta - \mu N\cos\theta = m\cdot a_N \quad\Leftrightarrow\quad N\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right) = m\cdot\frac{v^2}{R}\,.$$

$$N\cos\theta + \mu N\sin\theta - mg = 0 \quad\Leftrightarrow\quad N\left(\cos\theta + \mu\sin\theta\right) = mg \quad\Leftrightarrow\quad N = \frac{mg}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

Setter uttrykket for N inn i den første likningen:

$$\frac{\cancel{m}g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right)}{\cos\theta + \mu\sin\theta} = \cancel{m}\cdot\frac{v^2}{R} \quad\Leftrightarrow\quad v^2 = Rg\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}\cdot\frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}} = Rg\frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta}\,.$$

Vi setter inn tall for å finne den minste farten bilen må ha for ikke å gli innover i den doserte svingen:

$$v_{\min} = \sqrt{Rg\frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta}} = \sqrt{100\,\mathrm{m}\cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}\,\frac{\tan 15.8^\circ - 0.20}{1 + 0.20\tan 15.8^\circ}} = \underline{\underline{8.8\,\mathrm{m/s}}}\,.$$

Hva er så den maksimale farten bilen kan ha for ikke å skrense ut av svingen? Dersom bilen kjører fortere enn 60 km/h, må friksjonskraften virke innover i svingen for å gi et ekstra bidrag til sentripetalkraften. Når vi er på grensen til å gli, er som før $F_f = \mu N$. En dekomponering av Newtons 2. lov gir nå (kontroller!)

$$N\sin\theta + \mu N\cos\theta = m\cdot a_N \quad\Leftrightarrow\quad N\left(\sin\theta + \mu\cos\theta\right) = m\cdot\frac{v^2}{R}\,.$$

$$N\cos\theta - \mu N\sin\theta - mg = 0 \quad\Leftrightarrow\quad N\left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right) = mg \quad\Leftrightarrow\quad N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$$

Setter uttrykket for N inn i den første likningen:

$$\frac{\cancel{m}g\left(\sin\theta + \mu\cos\theta\right)}{\cos\theta - \mu\sin\theta} = \cancel{m}\cdot\frac{v^2}{R} \quad\Leftrightarrow\quad v^2 = Rg\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} = Rg\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}\,.$$

Vi setter inn tall for å finne den største farten bilen må ha for ikke å gli utover i den doserte svingen:

$$v_{\max} = \sqrt{Rg\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}} = \sqrt{100\,\mathrm{m}\cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}\,\frac{\tan 15.8^\circ + 0.20}{1 - 0.20\tan 15.8^\circ}} = \underline{\underline{22.4\,\mathrm{m/s}}}\,.$$

Omregning til km/h gir at farten må ligge mellom 31.7 km/h og 80.6 km/h for at en bil med friksjonstall mellom bilhjul og veibane på $\mu = 0.20$ skal kunne kjøre gjennom den doserte svingen uten å gli.

Det kan være nyttig å kontrollere formlene for minimal og maksimal fart ved å se på noen spesialtilfeller:

- Dersom det ikke er friksjon slik at $\mu = 0$, blir
  $$v_{\min} = v_{\max} = \sqrt{Rg\tan\theta}\,.$$
  Dette stemmer med det vi fant i del a) av eksemplet.

- Dersom det ikke er noen dosering slik at $\theta = 0$, blir
  $$v_{\max} = \sqrt{Rg\mu}\,.$$
  Dette stemmer med det vi fant i eksempel 3.5.2 i grunnteksten.