3. Krefter. Newtons lover.

Krefter og kreftenes betydning for å sette ting i bevegelse har fascinert menneskene i flere tusen år. I dette kapitlet skal vi se på de viktigste sammenhengene mellom krefter og bevegelse. Vi skal spesielt se på Newtons 2. lov, som ofte kalles for ***mekanikkens grunnlov***. Det er en eksperimentell lov som ikke kan bevises matematisk. Men man har aldri funnet noe eksempel på at loven ikke gjelder.

3.1. Innledning.
Vi kommer inn på begrepene ***kraft*** og ***masse***, og betrakter kraft som en vektor.

3.2. Newtons lover.
Vi går rett på sak:
3.2.1. Newtons 1. lov. En nødvendig forutsetning for å definere *inertialsystem*, som er et koordinatsystem der Newtons 2. lov gjelder.
3.2.2. Newtons 2. lov. Dette er hovedkapitlet.
3.2.3. Newtons 3. lov. Gjelder krefter mellom to legemer.
3.2.4. Masse og tyngde.
3.2.5. Newtons 2. og Newtons 3. lov. Behandler situasjoner der det er lett å blande sammen disse to lovene.

3.3. Bruk av Newtons lover.
Et viktig kapitel om krefter og deres virkning.

3.4. Friksjonskrefter.
Vi ser på to typer:
3.4.1. Glidende friksjon. Dette er den vanlige formen, der to faste legemer glir mot hverandre.
3.4.2. Viskøs friksjon. Et fast legeme glir gjennom en væske eller gass. Vanskelig tema.

3.5. Krumlinjet bevegelse.
Vi får akselerasjon også når hastighetsvektoren skifter retning, ikke bare når den endrer størrelse.
3.5.1. Generelle prinsipper.
3.5.2. Sirkelbevegelse. Et viktig spesialtilfelle.

3.6. Gravitasjon. Litt om tyngdekraften.

*3.7. Mer kompliserte situasjoner. Vi ser nærmere på noen spesielle situasjoner.
3.7.1. To sammenbundne legemer.
3.7.2. Kjeglependel.

3.8. Sammendrag.

3.9. Oppgaver med løsninger.
3.9.1. Småoppgaver i teksten.
3.9.2. Blandede oppgaver.
3.9.3. Løsninger på småoppgaver.
3.9.4.Svar på blandede oppgaver.

3.1. Innledning.

Hittil har vi sett hvordan vi kan *beskrive* bevegelse. Den delen av mekanikken kalles gjerne ***kinematikk***. Men et viktig spørsmål står nå for tur: Hva er det som *forårsaker* bevegelse? For å svare på dette, må vi gå inn på ***dynamikk***, som er den delen av mekanikken som tar for seg krefter og deres virkninger.

Først må vi se nærmere på to vanskelige begrep: ***kraft*** og ***masse***. Dette er to ulne begrep, som det er vanskelig å definere på en enkel og eksakt måte. Det hele kompliseres ved at vi i dagligtalen ofte blander sammen disse begrepene, eller bruker dem feil.

La oss se på et eksempel: Du går opp på badevekta, og utbryter: ”Uff da, jeg veier 80 kg!”. Så tar du badevekta med deg på en tripp til månen. Der veier du bare 14 kg. Betyr det at du har gått drastisk ned i vekt?

Svaret på det spørsmålet kan være ”ja” eller ”nei”, avhengig av hva du mener med at du ”veier” noe. Badevekta måler egentlig en ***kraft***, nemlig gravitasjonskraften som virker mellom deg og jordkloden (eller månen). Denne kraften er drastisk redusert når du drar til månen. Men produsenten av badevekta har tilpasset skalaen slik at denne kraften skal være et mål for noe helt annet, nemlig din ***masse*** (i alle fall så lenge du bruker vekta på jorda). Litt upresist kan vi si at massen er et mål for ”hvor mye” det er av deg. Dette medfører at din *masse* ikke endrer seg når du drar til månen (vi ser bort fra lunsjen du spiste under veis).

Masse måles i ***kilogram***, forkortet *kg*. Ett kg er pr definisjon massen av et platina-legeme som oppbevares i Paris. Massen til andre legemer sammenliknes deretter med massen til dette standardlegemet. Denne sammenlikningen kan skje ved å sammenlikne *krefter*.

Det er to hovedtyper krefter:

- ***Nærkrefter***, som virker når to legemer er i kontakt med hverandre. Eksempel: Når en bokser lander et velrettet slag på motstanderens hakespiss, virker det nærkrefter.
- ***Fjernkrefter***, som virker mellom legemer som ikke er i kontakt med hverandre. Eksempel: Gravitasjonskrefter (”tyngdekraft”), elektriske og magnetiske krefter.

Krefter måles i ***Newton***, forkortet *N*. En kraft på 1 N er pr definisjon den kraften som skal til for å gi en masse på 1 kg en akselerasjon på $1\ \mathrm{m/s^2}$ dersom ingen andre krefter virker i akselerasjonsretningen. Benevningen N er derfor ekvivalent med $\mathrm{kg \cdot m/s^2}$.

Vi har etter hvert utviklet redskaper til å måle krefter. Grundige og nøyaktige eksperimenter har vist at uansett hvilke krefter det er tale om, er det en enkel matematisk sammenheng mellom kraft og masse. Denne sammenhengen kalles ***Newtons 2. lov***, og vi skal se grundig på den etter hvert. Men vi må gjøre litt mer forarbeid først.

Eksperimenter har vist at krefter er *vektorer*. Dette innebærer at dersom flere krefter virker samtidig på samme legeme, kan de erstattes av *en* kraft (kalt ***resultantkraften***) som er vektor-summen av enkeltkreftene. Det innebærer også at krefter kan *dekomponeres*. Eksemplet nedenfor viser hvordan vi kan gå fram.

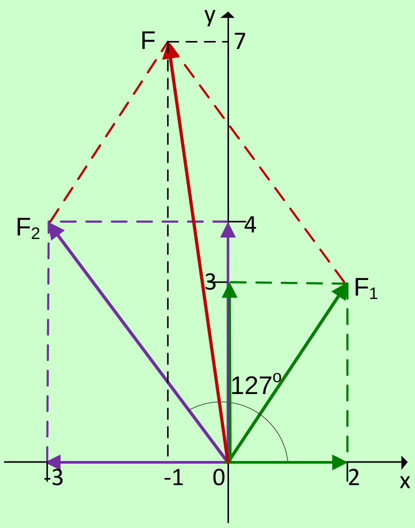
Eksempel 3.1.1: En kraft $\mathbf{F}_1$ er gitt ved $\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 2.0\,\mathrm{N} \\ 3.0\,\mathrm{N} \end{bmatrix}$.

En annen kraft $\mathbf{F}_2$ har størrelse 5.0 N, og danner en vinkel $\varphi = 127^\circ$ med positiv *x*-akse.

a) Finn *x*- og *y*-komponentene til $\mathbf{F}_2$.

b) Finn størrelse og retning til $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, og tegn inn $\mathbf{F}$ i samme figur som $\mathbf{F}_1$ og $\mathbf{F}_2$.

Løsning:



Av figuren ser vi at

$$F_{2x} = |\mathbf{F}_2| \cdot \cos\varphi = 5.0\,\mathrm{N} \cdot \cos 127^\circ = \underline{\underline{-3.00\,\mathrm{N}}}.$$

$$F_{2y} = |\mathbf{F}_2| \cdot \sin\varphi = 5.0\,\mathrm{N} \cdot \sin 127^\circ = \underline{\underline{4.00\,\mathrm{N}}}.$$

Dette betyr at

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.0\,\mathrm{N} \\ 4.0\,\mathrm{N} \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 2.0\,\mathrm{N} \\ 3.0\,\mathrm{N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3.0\,\mathrm{N} \\ 4.0\,\mathrm{N} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1.0\,\mathrm{N} \\ 7.0\,\mathrm{N} \end{bmatrix}}}.$$

Størrelsen til $\mathbf{F}$ er

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} = \sqrt{(-1.0\,\mathrm{N})^2 + (7.0\,\mathrm{N})^2}$$

$$= \sqrt{50\,\mathrm{N}^2} = \underline{\underline{5\sqrt{2}\,\mathrm{N}}} = \underline{\underline{7.07\,\mathrm{N}}}$$

$\mathbf{F}$ danner en vinkel θ med positiv *x*-akse som er gitt ved

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{7.0\,\mathrm{N}}{-1.0\,\mathrm{N}} = -7 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = -81.9^\circ + 180^\circ = \underline{\underline{98.1^\circ}}.$$

Oppgave 3.1.1.

3.2. Newtons lover.

3.2.1. Newtons 1. lov.

For noen hundre år siden mente man at det måtte krefter til for å opprettholde en bevegelse. Det er ikke så rart, når man tenker på at man må bruke krefter for å trille en vogn eller for å bære en tung gjenstand. ***Isaac Newton*** snudde opp ned på denne forestillingen. Han sa tvert imot at:

Newtons 1. lov:
Et legeme bevarer sin hastighet dersom summen av kreftene som virker på det er lik null.

Et par merknader er på sin plass:

- *Hastighet* er en vektorstørrelse. Det innebærer at hastigheten verken kan endre størrelse eller retning uten at det virker krefter på legemet.

- *Krefter* er også vektorstørrelser. ”Summen av kreftene” er derfor en vektorsum.

Dersom du står inne i en buss, og bussen bråbremser eller tar en brå sving, vil du settes i bevegelse *inne i bussen* dersom du ikke bruker krefter for å holde deg fast. Dette er tilsynelatende i strid med Newtons 1. lov. Vi må derfor gjøre en tilføyelse: Newtons 1. lov gjelder kun når bevegelsen beskrives i forhold til et koordinatsystem som vi skal kalle et ***inertialsystem*** eller et ***treghetssystem***.

Hva er så et inertialsystem? Det er rett og slett definert som et koordinatsystem der Newtons 1. lov gjelder. Tilsynelatende er dette en forunderlig definisjon som kun har til hensikt å ”redde” Newtons 1. lov. Men det viser seg at det er svært nyttig å beskrive all bevegelse i slike inertialsystemer. Da vi i kapitlet om bevegelse sa at vi skulle ta utgangspunkt i et koordinatsystem “i ro”, var det egentlig et slikt inertialsystem vi mente.

Når vi først har påvist et inertialsystem, er alle andre koordinatsystemer som beveger seg med konstant hastighet og uten å rotere i forhold til inertialsystemet også inertialsystemer. Jorda er strengt tatt ikke et inertialsystem, fordi jorda roterer om sin egen akse i tillegg til at jordas hastighet i banen rundt sola ikke er konstant (merk at *hastighet* er en vektor). For kortvarige bevegelser kan vi imidlertid regne som om jorda er et inertialsystem.

3.2.2. Newtons 2. lov.

Hva skjer dersom summen av kreftene som virker på et legeme ikke er lik null? ***Newtons 2. lov*** gir oss svaret:

Newtons 2. lov:
Dersom et legeme med masse m påvirkes av en kraftsum $\mathbf{F}$, vil legemet få en akselerasjon $\mathbf{a}$ slik at

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

Denne tilsynelatende enkle sammenhengen omtales gjerne som *mekanikkens grunnlov*. Den kan ikke bevises matematisk. Den er et resultat av et utall eksperimenter, kombinert med forståelse av begrepene *kraft* og *masse*.

Det kan knyttes mange kommentarer til denne tilsynelatende enkle loven. Foreløpig kan vi nøye oss med disse:

- *Krefter* er vektorstørrelser. En ”kraftsum $\mathbf{F}$” er derfor en vektorsum.

- Newtons 2. lov er en ***vektorlikning***. Dette innebærer at $\mathbf{a}$ og $\mathbf{F}$ har samme retning. Det innebærer også at både $\mathbf{a}$ og $\mathbf{F}$ kan dekomponeres, og at likningen må gjelde for alle komponentene.

- Newtons 2. lov gjelder kun i et inertialsystem.

Det kan se ut som om Newtons 1. lov bare er et spesialtilfelle av 2. lov med $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Men så enkelt er det ikke. Vi må formulere Newtons 1. lov først, og bruke den til å definere begrepet "inertialsystem". Først da kan vi formulere Newtons 2. lov.

3.2.3. Newtons 3. lov.

Mens Newtons 1. og 2. lov gjelder for krefter som virker på *ett* legeme, gjelder Newtons 3. lov for vekselvirkningen *mellom* to legemer:

Newtons 3. lov:
Dersom et legeme virker på et annet legeme med en kraft **F**, virker det andre legemet tilbake på det første med en motsatt like stor kraft $-\mathbf{F}$.

Dette innebærer bl.a. at dersom to personer trekker i hver sin ende av et tau, vil de alltid virke på hverandre med motsatt like stor kraft. Er det da mulig at den ene kan vinne tautrekkingen? Slike problemer skal vi ta for oss senere.

3.2.4. Masse og tyngde.

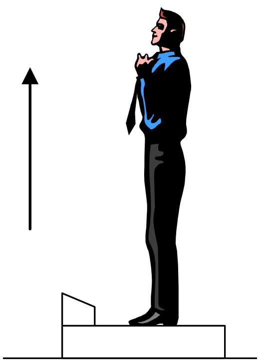
Da vi studerte prosjektilbevegelse, slo vi fast at dersom et legeme slippes nær jordas overflate og vi innretter oss slik at luftmotstand kan neglisjeres, vil alle legemer få en akselerasjon med størrelse $g \approx 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ med retning inn mot jordas sentrum. Ifølge Newtons 2. lov må det da virke en kraft på legemet med retning inn mot jordas sentrum. Dersom legemet har massen *m*, må størrelsen av denne kraften være

$$G = m \cdot g\,.$$

Denne kraften er det vi kaller ***legemets tyngde***.

Når vi veier oss på ei vanlig badevekt, er det egentlig vår *tyngde* (en kraft) vi måler. Men skalaen på badevekta er utformet slik at vi leser av *massen* forutsatt at $g \approx 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

3.2.5. Newtons 2. lov og Newtons 3. lov.

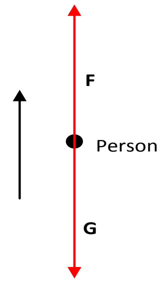


La oss se nærmere på vår venn på badevekta, og sortere ut de kreftene som virker. Situasjonen er vist til venstre, der vår venn står på badevekta som igjen står på gulvet. Vi velger positiv retning oppover som angitt med pila, og innfører en enhetsvektor $\hat{\mathbf{j}}$ med retning oppover. Vår venn påvirkes da av en tyngdekraft

$$\mathbf{G} = -m \cdot g \cdot \hat{\mathbf{j}}$$

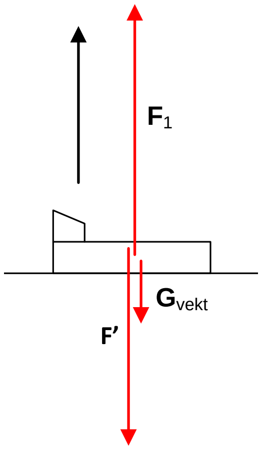
der *m* er hans masse og *g* er tyngdens akselerasjon. Minustegnet følger av at vi har definert positiv retning oppover, mens tyngdekraften virker nedover på vår venn.

Men vi vet også at vår venn står i ro. Ifølge Newtons 2. lov må det virke en annen kraft **F** slik at vektorsummen av alle kreftene er lik null. Denne kraften må komme *fra* badevekta *mot* vår venn.



Når vi illustrerer krefter som virker på et legeme, er det ofte gunstig å erstatte legemet med et punkt og tegne kreftene som om de virker på dette punktet. Dette viser seg å være nyttig, i alle fall så lenge legemet ikke roterer. En slik forenkling er vist til venstre der vår venn er erstattet av et punkt og kreftene er tegnet som om de angriper i dette punktet. Vi ser at

$$\mathbf{F}+\mathbf{G}=\mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}=-\mathbf{G}=-\left(-mg\hat{\mathbf{j}}\right)=mg\hat{\mathbf{j}}.$$



La oss nå konsentrere oss om badevekta. Siden det virker en kraft

$$\mathbf{F}=mg\hat{\mathbf{j}}$$

fra badevekta *mot* personen, må det ifølge Newtons 3. lov virke en motsatt like stor kraft

$$\mathbf{F}'=-\mathbf{F}=-mg\hat{\mathbf{j}}$$

fra personen *mot* badevekta. Dessuten har badevekta en tyngde $\mathbf{G}_{\text{vekt}}$. Begge disse kreftene virker nedover. Men badevekta står i ro. Ifølge Newtons 2. lov må det da virke en tredje kraft $\mathbf{F}_1$ på badevekta slik at summen av kreftene er lik null. Denne kraften må virke *fra* gulvet *mot* badevekta. Dersom vi setter badevektas masse til m_{vekt}, får vi:

$$\mathbf{F}'+\mathbf{G}_{\text{vekt}}+\mathbf{F}_1=0$$

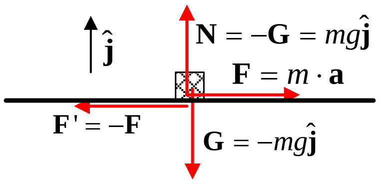
$$\mathbf{F}_1=-\mathbf{F}'-\mathbf{G}_{\text{vekt}}=-\left(-\mathbf{F}\right)-\left(-m_{\text{vekt}}g\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$=\mathbf{F}+m_{\text{vekt}}g\hat{\mathbf{j}}=mg\hat{\mathbf{j}}+m_{\text{vekt}}g\hat{\mathbf{j}}=\underline{\underline{\left(m+m_{\text{vekt}}\right)g\hat{\mathbf{j}}}}$$

Merk hvordan vi bruker Newtons 2. lov når vi studerer krefter på *ett* legeme, og Newtons 3. lov når vi studerer kraftvirkning *mellom* to legemer.

Hvis du har holdt regnskap med kreftene, vil du ha funnet tre krefter som vi ikke har satt opp motkrefter til i henhold til Newtons 3. lov. De to tyngdekreftene $\mathbf{G}$ og $\mathbf{G}_{\text{vekt}}$ har begge motkrefter som virker *på* jordkloden, og som har retning *mot* personen og badevekta. Kraften $\mathbf{F}_1$ har en motkraft som virker *på* gulvet, og som har retning nedover (prøver å presse gulvet ned i kjelleren). For oversiktens skyld tar vi ikke med disse kreftene i vårt kraftregnskap.

Vår venn setter seg inn i bilen og tråkker gasspedalen i bunn. Bilen får da en akselerasjon **a**. Da må bilen påvirkes av en kraft $\mathbf{F}=m\cdot\mathbf{a}$. Vi antar at bilen er på horisontal vei. Da må også kraften **F** virke horisontalt, og i samme retning som akselerasjonen. Denne kraften må komme *fra* veibanen *mot* bilen, d.v.s. mot bilens drivhjul. Dette kan vi illustrere som vist nedenfor, der bilen er framstilt som et lite legeme:



Når *veien* virker mot *bilen* med en kraft **F**, må *bilen* virke tilbake på *veien* med en like stor kraft $\mathbf{F}'$ med motsatt retning ifølge Newtons 3. lov. Det denne kraften som kan føre til at grus og sand spruter ut bak en bil som akselererer. På figuren er det også tegnet inn tyngdekraften **G** som virker rett nedover. Siden bilen ikke har akselerasjon i vertikal retning, må det også virke en like stor kraft **N** oppover.

Tyngden **G** virker *fra* jordkloden *på* bilen. Den motkraften som ifølge Newtons 3. lov må virke *fra* bilen *på* jordkloden er ikke tegnet inn. Kraften **N** virker *fra* veibanen *på* bilen. Den motkraften som ifølge Newtons 3. lov må virke *fra* bilen *på* veibanen er heller ikke tegnet inn.

3.3. Bruk av Newtons lover.

Vi har sett at selv i forholdsvis enkle situasjoner kan en komplett oversikt over alle de kreftene som virker bli temmelig omfattende. Det er derfor vanlig å ta med bare de kreftene som har betydning i den aktuelle situasjonen. Men det krever en del erfaring å innse hvilke krefter som må tas med, og hvilke som vi kan utelate. Jeg skal nå sette opp noen generelle retningslinjer:

- Dersom kun ett legeme inngår i problemet, er det vanligvis tilstrekkelig å se på bare de kreftene om virker *på* dette legemet, og benytte Newtons 2. lov. Husk at tyngden alltid må tas med.
- Dersom flere legemer inngår, må du i tillegg benytte Newtons 3. lov på de kreftene som virker *mellom* legemene.

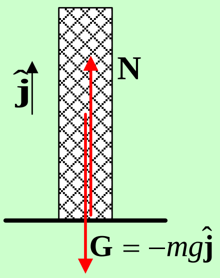
Når du går løs på slike problem, kan det lønne seg å følge en fast prosedyre:

1. Tegn en *god* figur. Du kan godt erstatte de legemene som inngår med massepunkter. Det er viktig at figuren er stor og oversiktlig. Små, rotete figurer tegnet uten linjal er en sikker vei til fiasko.

2. Tegn inn de kreftene som virker. Når du tegner, kan det lønne seg å huske at:
   - Dersom et legeme *ikke* har akselerasjon, er vektorsummen av kreftene på dette legemet lik null. Dersom krefter må dekomponeres, kan det lønne seg å dekomponere langs en horisontal og en vertikal akse. Dermed slipper du å dekomponere tyngden.
   - Dersom et legeme *har* akselerasjon, har vektorsummen av kreftene samme retning som akselerasjonen. Da kan det lønne seg å dekomponere langs en akse i akselerasjonsretningen og en akse vinkelrett på denne.

Mange av løsningsdetaljene kan utføres på ulike måter. Finn et system som du selv forstår, og føler deg trygg med.

Eksempel 3.3.1: Du befinner deg inne i en heis som kan stå i ro eller være i bevegelse. Lag en figur der du tegner inn de kreftene som virker på deg. Avgjør i hvilke situasjoner disse kreftene er like store, og i hvilke situasjoner de *ikke* er like store.



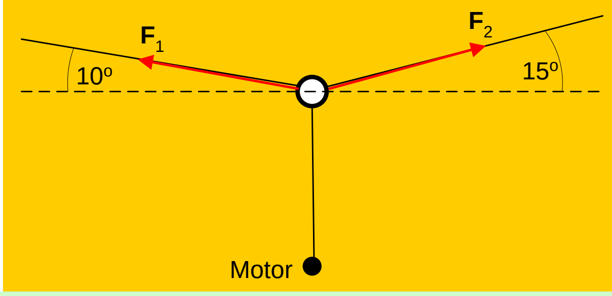
Løsning: Figuren til venstre viser heisgulvet, mens du er tegnet som et rektangel med masse *m*. Når heisen beveger seg, vil den bevege seg vertikalt. Da legger vi inn en vertikal akse, og velger positiv retning oppover. Du vil da påvirkes av en tyngdekraft $\mathbf{G} = -mg\hat{\mathbf{j}}$ med retning nedover, og en kraft **N** fra heisgulvet med retning oppover. Kraftsummen blir da

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} + \mathbf{G} = \mathbf{N} - mg\hat{\mathbf{j}}.$$

- Dersom du ikke har akselerasjon, er $\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{N} = mg\hat{\mathbf{j}}$. Dette er tilfelle dersom heisen går med konstant fart enten oppover eller nedover.
- Dersom heisen (og du) har akselerasjon oppover, må det også virke en kraftsum oppover. Da er
$$\mathbf{F} > \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{N} - mg\hat{\mathbf{j}} > \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{N} > mg\hat{\mathbf{j}}.$$
Dette inntreffer når heisen går oppover og får større fart, eller når den går nedover og får mindre fart.
- Dersom heisen (og du) har akselerasjon nedover, må det også virke en kraftsum nedover. Da er
$$\mathbf{F} < \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{N} - mg\hat{\mathbf{j}} < \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{N} < mg\hat{\mathbf{j}}.$$
Dette inntreffer når heisen går oppover og får mindre fart, eller når den går nedover og får større fart.

Så tar vi et eksempel der du må dekomponere krefter, men der det ikke er akselerasjon slik at vektorsummen av kreftene må være lik null:

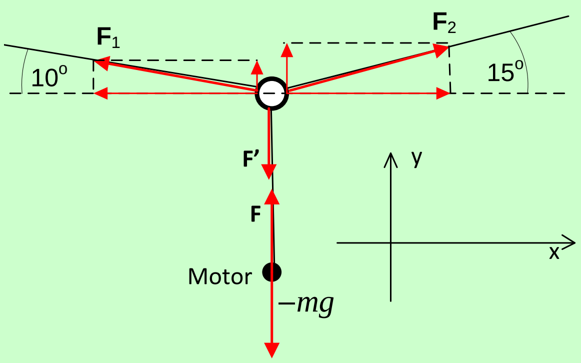
Eksempel 3.3.2:



En motor med masse $m = 100\,\text{kg}$ hektes opp i en ring som er festet til to snorer som danner vinkler på henholdsvis $\theta_1 = 10^\circ$ og $\theta_2 = 15^\circ$ med horisontalplanet som vist på figuren.

Finn størrelsene av kreftene $\mathbf{F}_1$ og $\mathbf{F}_2$.

Løsning:



Vi legger et koordinatsystem som vist på figuren. Vi erstatter motoren med et massepunkt. Siden motoren henger i ro, må det virke en kraft **F** oppover som er motsatt like stor som motorens tyngde som er $\mathbf{G} = -mg\,\hat{\mathbf{j}}$. På vektorform får vi (med de positive retningene som er angitt):
$$\mathbf{F} = -\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(-mg) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix}.$$

Denne kraften virker *på* motoren *fra* ringen. Da må det virke en motsatt like stor kraft $\mathbf{F}'$ *fra* motoren *på* ringen, slik at
$$\mathbf{F}' = -\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}.$$
Siden ringen er i ro, gir Newtons 2. lov at
$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}' = \mathbf{0}.$$
Nå må vi dekomponere de to ukjente kreftene $\mathbf{F}_1$ og $\mathbf{F}_2$. Jeg skal skrive F_1 istedenfor det mer korrekte $|\mathbf{F}_1|$ når jeg mener absoluttverdien av $\mathbf{F}_1$, og tilsvarende for $\mathbf{F}_2$. Fortegnet til komponentene ser jeg av figuren. Da får jeg:

$$\begin{bmatrix} -F_1\cos\theta_1 \\ F_1\sin\theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_2\cos\theta_2 \\ F_2\sin\theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir de to likningene:

$$-F_1\cos\theta_1 + F_2\cos\theta_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_1 = F_2\frac{\cos 15^\circ}{\cos 10^\circ} \approx \underline{0.981F_2}\,.$$

$$F_1\sin\theta_1 + F_2\sin\theta_2 - mg = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0.98F_2\sin 10^\circ + F_2\sin 15^\circ = mg$$

$$\Leftrightarrow \quad F_2\left(0.981\cdot\sin 10^\circ + \sin 15^\circ\right) = mg \quad \Leftrightarrow \quad F_2 = \frac{mg}{0.429} = \frac{100\,\text{kg}\cdot 9.81\,\text{m/s}^2}{0.429} \approx \underline{\underline{2290\,\text{N}}}$$

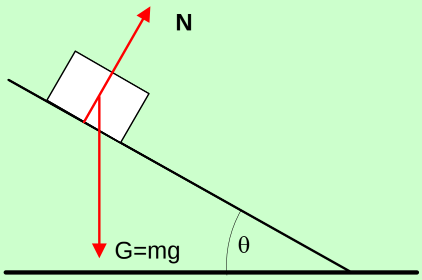
$$F_1 = 0.981F_2 = 0.981\cdot 2290\,\text{N} \approx \underline{\underline{2250\,\text{N}}}\,.$$

Her kan det være verd å merke seg at kreftene i snorene er mer enn dobbelt så store som motorens tyngde. Dette skyldes at snorene danner så stor vinkel med tyngden.

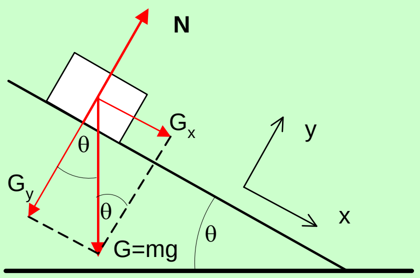
Oppgave: 3.3.1.

Eksempel 3.3.3: En kloss med masse *m* glir friksjonsfritt ned et skråplan som danner en vinkel θ med horisontalplanet. Finn et uttrykk for klossens akselerasjon ned skråplanet, og kraften fra skråplanet mot klossen.

Løsning:



Vi starter med å lage en figur, der vi tegner inn de kreftene som virker. Vi kan uten videre tegne inn tyngden **G** som en vektor med retning nedover, der $|\mathbf{G}| = mg$. Videre vet vi at klossen glir *ned langs skråplanet*. Dersom tyngden **G** virket alene, ville klossen falt rett ned. Det må altså være en kraft som holder klossen på skråplanet. Siden det ikke er friksjon, må denne kraften virke vinkelrett *fra* skråplanet *mot* klossen. Dette er *normalkraften* **N**. Figuren med krefter inntegnet er vist til venstre.



Vi vet at akselerasjonen har retning ned langs skråplanet. Da er det lurt å dekomponere slik at *x*-aksen har retning ned langs skråplanet mens *y*-aksen står vinkelrett på skråplanet slik figuren til venstre viser. Da blir akselerasjonen

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tyngdekraften dekomponeres til

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_x \\ -G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{bmatrix}$$

der fortegnene framgår av retningene på figuren. Normalkraften fra skråplanet mot klossen blir

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix}.$$

Da blir Newtons 2. lov:

$$\mathbf{N} + \mathbf{G} = m\mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} a_x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får de to komponent-likningene

$$mg\sin\theta = m \cdot a_x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = g\sin\theta}}$$

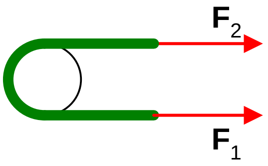
og

$$N - mg\cos\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{N = mg\cos\theta}}\,.$$

Oppgave: 3.3.2.

I eksemplene ovenfor har jeg brukt vektor-notasjon, i alle fall i starten av løsningene. Men etter hvert har jeg sett på hver komponent for seg. Noen ganger kan det lønne seg å skrive ned komponent-likningene direkte uten å bruke vektor-formalismen. Men da er det viktig å huske at Newtons 2. lov er en vektor-likning, slik at du må ta hensyn til både størrelse og retning.

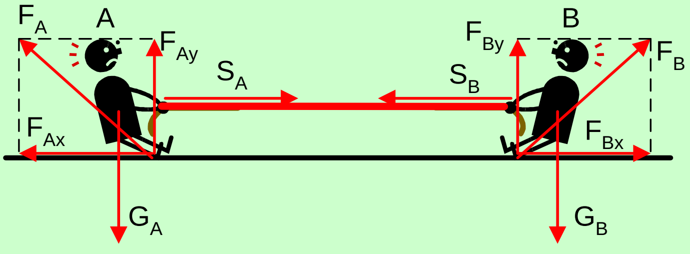
Dersom problemet ditt inneholder flere legemer, tar du for deg ett legeme om gangen. Tenk på Newtons 2. lov når du tegner inn kreftene på et legeme, og husk at tyngden alltid virker loddrett nedover. Bruk Newtons 3. lov når du tegner inn krefter som virker *mellom* legemer. Noen ganger er slike legemer i direkte kontakt med hverandre, men det er mer vanlig at de er forbundet med tau. Vanligvis antar vi at disse tauene er masseløse. Av Newtons 2. lov følger at når massen er lik null, må også summen av de kreftene som virker på tauet være lik null. Dette innebærer at $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|$ i figuren til venstre nedenfor. Det er kanskje mindre innlysende at vi har samme situasjon dersom tauet legges over ei masseløs trinse eller at tauet kan gli uten friksjon på trinsa, som vist nedenfor til høyre. Men også her er $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|$.



La oss se et par eksempler på dette resonnementet. Det første eksemplet er kanskje litt overraskende:

Eksempel 3.3.4: To personer, A og B, står på et horisontalt underlag og trekker tau. Tegn inn de kreftene som virker på de to personene, og forklar ut fra Newtons lover hva som skjer når den ene vinner.

Løsning: Situasjonen er tegnet inn nedenfor.



Disse kreftene virker på hver av personene:

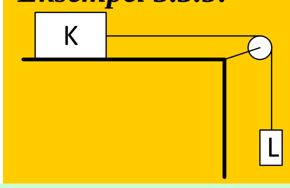
- $\mathbf{G}_A$ og $\mathbf{G}_B$ er tyngdene til hver av personene.
- $\mathbf{S}_A$ og $\mathbf{S}_B$ er kreftene som virker på de to personene via tauet.
- $\mathbf{F}_A$ og $\mathbf{F}_B$ er kreftene fra underlaget mot hver av de to personene.

Det er nærliggende å si at den ene vinner fordi han trekker i tauet med større kraft enn den andre. Men ifølge Newtons 2. lov er $\mathbf{S}_A$ og $\mathbf{S}_B$ motsatt like store *hele tiden,* også når en av dem vinner tautrekkingen. Hvordan kan da en av dem vinne??

Forklaringen ligger i kreftene $\mathbf{F}_A$ og $\mathbf{F}_B$ fra underlaget mot personene. Disse kreftene dekomponeres i x- og y-retningene. Da ser vi at for hver person må y-komponenten av **F** være motsatt lik tyngden til personen. Så lenge en person står i ro, er x- komponenten av **F** motsatt lik **S**. For at en person skal vinne, må x-komponenten av **F** bli større enn **S**. Det er altså den personen som sparker kraftigst fra mot underlaget som vinner. Begge trekker med nøyaktig like stor kraft i tauet hele tiden.

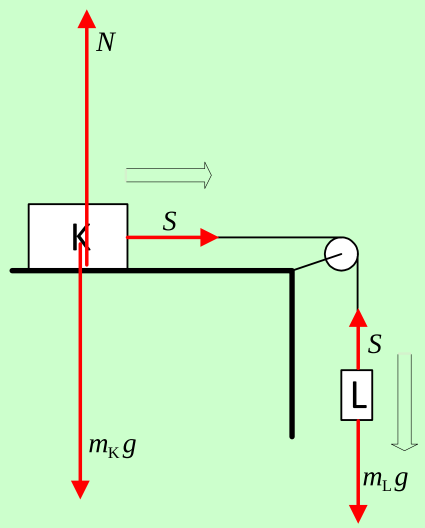
Så tar vi en situasjon som har vært utgangspunkt for et utall eksamensoppgaver:

Eksempel 3.3.5:



En kloss K med masse $m_K = 1.50\,\text{kg}$ ligger på et horisontalt bord. Ei masseløs, ustrekkelig snor går horisontalt fra klossen, over ei trinse og til et lodd L med masse $m_L = 0.50\,\text{kg}$ slik figuren til venstre viser. Se bort fra alle former for friksjon. Systemet slippes. Finn akselerasjonen, og finn kraften i snora.

Løsning: Vi løser slike problem ved å sette opp Newtons 2. lov for hvert del-legeme for seg, og starter med å definere positive retninger for hvert del-legeme slik at begge legemene har samme akselerasjon med samme fortegn.



All erfaring sier oss at loddet vil få akselerasjon nedover, mens klossen får akselerasjon mot høyre slik figuren til venstre viser. Siden det ikke er friksjon i trinsa, og trinsa er masseløs, er kraften i snora (snordraget S) like stort i begge ender av snora. Og siden snora er like lang hele tiden (ustrekkelig), er også akselerasjonen lik for både loddet og klossen. Da nøyer vi oss med å sette opp Newtons 2. lov i horisontal retning for klossen, og vertikal retning for loddet, med de positive retningene som er vist i figuren til venstre.

For loddet: $m_L g - S = m_L a$.

For klossen: $S = m_K a$.

Så legger vi sammen disse to likningene, og får

$$m_L g = m_L a + m_K a = (m_L + m_K)a$$

$$a = \frac{m_L g}{m_L + m_K} = \frac{0.50\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2}{0.50\,\text{kg} + 1.50\,\text{kg}} = \underline{\underline{2.45\,\text{m/s}^2}}$$

Snordraget blir da

$$S = m_K a = 1.50\,\text{kg} \cdot 2.45\,\text{m/s}^2 = \underline{\underline{3.68\,\text{N}}}\,.$$

Du finner en mer komplisert versjon av dette problemet i kap. 3.7.1.

3.4. Friksjonskrefter.

Hittil har vi konsekvent sett bort fra friksjon i våre eksempler. I virkelighetens verden er det alltid en eller annen form for friksjon til stede. Vi må derfor ta hensyn til friksjon når vi skal lage realistiske modeller av fysiske system.

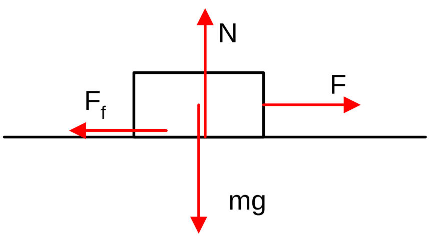
Grovt sett kan vi skille mellom to hovedtyper friksjon:

- ***Glidende friksjon*** der to faste legemer glir mot hverandre (eller prøver å gli mot hverandre). Eksempler kan være en kloss som glir på et skråplan, en bil som bremser, en skiløper som kjører ned en bakke osv.
- ***Viskøs friksjon*** der et fast legeme beveger seg gjennom en væske eller en gass. Eksempler kan være luftmotstand når vi kaster noe, eller vannmotstand når en båt går i stille vann.

Friksjon er et vanskelig tema dersom vi skal gå i detalj. Vi skal nøye oss med noen hoved-trekk. Vi skal likevel få fram de viktigste sidene ved friksjonskrefter.

3.4.1. Glidende friksjon.

Vi skal starte med å se på friksjonskrefter som oppstår når to faste legemer glir mot hverandre (eller prøver å gli mot hverandre). Utgangspunktet for våre undersøkelser kan være at en kloss kan gli på et horisontalt underlag:



Figuren viser en kloss med masse *m* som påvirkes av en trekk-kraft med størrelse *F* i horisontal retning. Klossen må også påvirkes av tyngdekraften $G = mg$, og en kraft *N* fra underlaget. *N* og *G* må være motsatt like store.

Så lenge *F* er tilstrekkelig liten, vil klossen ligge i ro. Da må det være en kraft F_f som holder igjen. Denne kraften skal vi kalle den ***statiske friksjonen***, der ordet *statisk* kommer av at kraften virker mens legemene er i ro i forhold til hverandre.

Vi trekker med stadig større trekk-kraft *F*. Når *F* er blitt tilstrekkelig stor, begynner klossen å gli. Vi merker oss den største verdien $F_{f,\max}$ av den statiske friksjonen like før klossen begynner å gli, og definerer ***det statiske friksjonstallet*** (eller ***friksjonsfaktoren*** eller ***friksjons-koeffisienten***) μ_s slik:

$$\mu_s = \frac{F_{f,\max}}{N}\,.$$

Det viser seg at μ_s avhenger av hvor glatt eller ru overflatene til de to legemene som berører hverandre er, men er tilnærmet uavhengig av flatenes størrelse og av m (og dermed også av N). Dette gjelder så lenge N ikke er så stor at flatene deformeres.

Så lar vi klossen gli med konstant fart på det horisontale underlaget, og lar F_f være friksjons-kraften mens klossen glir. Eksperimenter viser da at:

- F_f har retning mot fartsretningen.
- F_f avhenger av hvor glatt eller ru de flatene som glir mot hverandre er.
- F_f avhenger ikke av farten til klossen som glir.
- F_f avhenger ikke av størrelsen på berøringsflaten.
- F_f er proporsjonal med normalkraften N.

Den siste egenskapen fører til at vi definerer det ***kinetiske friksjonstallet*** (eller ***friksjons-faktoren*** eller ***friksjonskoeffisienten***) μ_k slik:

Dersom vi må bruke en konstant kraft F_f for å trekke et legeme med konstant fart på horisontalt underlag, er det ***kinetiske friksjonstallet*** μ_k definert ved

$$\mu_k = \frac{F_f}{N}$$

der N er normalkraften fra underlaget mot legemet.

Her er en liten oversikt over statiske og kinetiske friksjonstall:

Materialer	**Statisk friksjonstall** μ_s	**Kinetisk friksjonstall** μ_k
Stål mot stål	0.74	0.57
Aluminium mot stål	0.61	0.47
Kopper mot stål	0.53	0.36
Glass mot glass	0.94	0.40
Kopper mot glass	0.68	0.53
Teflon mot teflon	0.04	0.04
Gummi mot tørr asfalt	1.0	0.8
Gummi mot våt asfalt	0.30	0.25

Det viser seg at μ_s alltid er litt større enn μ_k. Dette innebærer bl.a. at like før et bildekk begynner å gli mot underlaget, kan friksjonskraften være litt større enn når dekket glir. Derfor oppnås størst bremsekraft dersom vi bremser slik at hjulet er på grensen til å gli.

Noen ganger er forskjellen mellom μ_s og μ_k såpass liten at vi ikke trenger å ta hensyn til den. Da setter vi $\mu_s = \mu_k = \mu$, og snakker bare om ”friksjonstallet”.

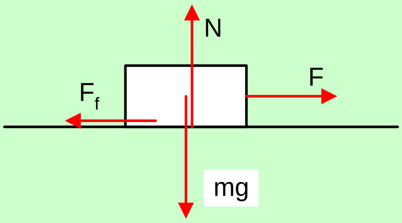
Eksempel 3.4.1: Du trekker en kasse med masse $m = 50.0\,\text{kg}$ med konstant fart langs et horisontalt gulv, og ser at når trekk-kraften er horisontal må du bruke en kraft $F = 230\,\text{N}$.

a) Finn friksjonstallet mellom kassen og underlaget. Vi skiller ikke mellom statisk og kinetisk friksjon.

b) Hvor stor kraft må du bruke dersom du trekker kassen på det horisontale underlaget med et tau som danner en vinkel på 30° med horisontalplanet?

Løsning:

a)



Legger *x*-akse horisontalt mot høyre og *y*-akse oppover. Vet at friksjonskraften $F_f = \mu N$. Så lenge trekk-kraften *F* er horisontal og farten er konstant (ingen akselerasjon), gir Newtons 2. lov

$$\begin{bmatrix} F - F_f \\ N - mg \end{bmatrix} = m \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

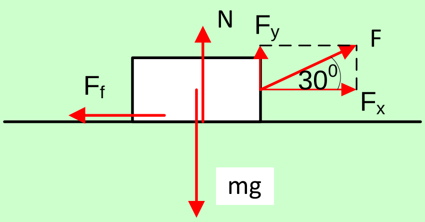
Av likningen for *y*-retningen får vi

$$N - mg = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N = mg\,.$$

Likningen for *x*-retningen gir nå

$$F - F_f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu N = F \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{F}{N} = \frac{F}{mg} = \frac{230\,\text{N}}{50.0\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2} = \underline{\underline{0.469}}\,.$$

b)



Selv om trekk-kraften *F* skifter retning, er friksjons-tallet μ uendret. Vi velger akser som før, men oppsettet av Newtons 2. lov blir mer komplisert siden trekk-kraften *F* må dekomponeres i en *x*- og en *y*-retning:

$$\begin{bmatrix} F_x - F_f \\ F_y + N - mg \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Her må vi merke oss at normalkraften *N* ikke lenger er motsatt lik tyngden *mg* fordi F_y også trekker oppover. Vi tar for oss de to komponent-likningene etter tur:

(*x*): $\quad F_x - F_f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F\cos\theta - \mu N = 0\,.$

(*y*): $\quad F_y + N - mg = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F\sin\theta + N = mg\,.$

Dette gir to likninger med *F* og *N* som ukjente. Vi løser likningene ved å finne *N* av den første likningen og sette inn i den andre:

$$F\cos\theta - \mu N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N = \frac{F\cos\theta}{\mu}$$

$$F\sin\theta + \frac{F\cos\theta}{\mu} = mg \quad \Leftrightarrow \quad F\left(\sin\theta + \frac{\cos\theta}{\mu}\right) = mg$$

$$F = \frac{mg}{\sin\theta + \frac{1}{\mu}\cos\theta} = \frac{(50.0\,\text{kg}) \cdot (9.81\,\text{m/s}^2)}{\sin 30^\circ + \frac{1}{0.469} \cdot \cos 30^\circ} = \underline{\underline{209\,\text{N}}}$$

Vi ser at vi må bruke mindre kraft nå enn da vi trakk horisontalt. Grunnen er at når kraften virker skrått oppover, blir normalkraften *N* og dermed også friksjonskraften mindre.

Oppgaver: 3.4.1, 3.4.2, *3.4.3.

3.4.2. Viskøs friksjon.

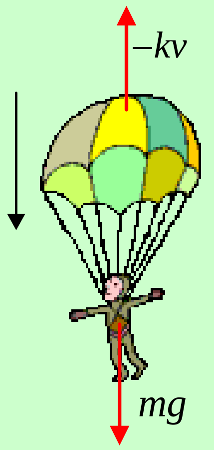
Når et legeme beveger seg i en væske eller en gass, vil legemet vil møte en motstand mot bevegelsen som avhenger av bl.a. farten. Eksperimenter viser at dersom farten v er liten, kan vi med brukbar nøyaktighet anta at friksjonskraften F_f er gitt ved

$$F_f = -k \cdot v$$

der k er en konstant som avhenger av legemets størrelse og form, og av den væsken eller gassen som legemet beveger seg gjennom. En tyktflytende væske vil gi mye større k enn en gass. Minustegnet angir at friksjonskraften og farten har motsatte retninger. Dersom vi kun er interessert i størrelsen av friksjonskraften, utelater vi minustegnet. Konstanten k får benevningen

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m/s}} = \frac{\mathrm{kg \cdot m/s^2}}{\mathrm{m/s}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}.$$

Eksempel 3.4.2:



Vi antar at fallskjermhopperen på figuren til venstre har masse $m = 80\,\mathrm{kg}$, og møter en luftmotstand gitt ved

$$F_f = -k \cdot v$$

der $k = 100\,\mathrm{N/(m/s)}$. Forklar at fallskjermhopperen etter en tid får tilnærmet konstant fart (kalt *terminalfarten*), og finn størrelsen på denne farten.

Løsning: Under hele hoppet er akselerasjonen gitt ved Newtons 2. lov:

$$mg - kv = m \cdot a\,.$$

Når farten v er liten, er $a \approx g$. Men etter hvert som v øker, vil venstre side av likningen bli stadig mindre slik at $a \to 0$. Konstant fart innebærer at

$$a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad mg = kv \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{mg}{k} = \frac{80\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}}{100\,\mathrm{N/(m/s)}} = \underline{\underline{7.85\,\mathrm{m/s}}}\,.$$

Dersom farten v er stor, blir formelen $F_f = -k \cdot v$ mindre nøyaktig. Da kan sammenhengen

$$F_f = -k \cdot v^2$$

(der k ikke har samme verdi som i formelen $F_f = -k \cdot v$) gi bedre nøyaktighet. Men generelt sier man gjerne at størrelsen til viskøs friksjonskraft er gitt ved

$$F_f = -k \cdot v^n$$

der n ligger i området 1 – 2, og både k og n avhenger av farten v.

Vi merker oss at ved viskøs friksjon er akselerasjonen ikke konstant. Det fører til at vi ikke kan bruke våre vanlige bevegelseslikninger. Vi må «skreddersy» bevegelseslikninger for hver situasjon. Da må vi løse differensiallikninger. Jeg skal ikke forutsette at du behersker dette.

3.5. Krumlinjet bevegelse.

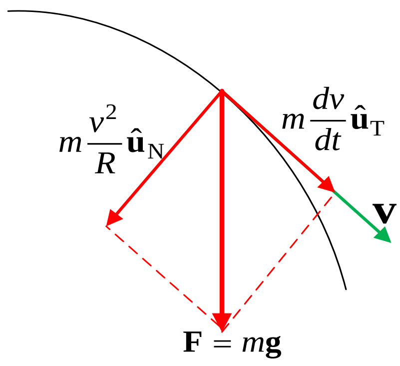
3.5.1. Generelle prinsipper.

I de eksemplene vi har sett på hittil, har enten legemene vært i ro eller har hatt rettlinjet bevegelse. Men det er også krefter med i spillet i forbindelse med krumlinjet bevegelse.
I kapitel 2 om bevegelse kom vi fram til at akselerasjonen til en partikkel kan skrives slik:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\cdot\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{T} + \frac{v^2}{R}\cdot\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{N}$$

der $\frac{dv}{dt}$ er *baneakselerasjonen* (endring av størrelsen av farten) med retning langs tangenten til banen, og $\frac{v^2}{R}$ er *sentripetalakselerasjonen* som har retning inn mot krumingssenteret, og som skyldes at fartsvektoren endrer retning. Da må vi også kunne skrive Newtons 2. lov slik:

$$\mathbf{F} = m\cdot\mathbf{a} = m\cdot\frac{dv}{dt}\cdot\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{T} + m\cdot\frac{v^2}{R}\cdot\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{N}\,.$$



Vi ser at kraften må kunne dekomponeres i to komponenter. Den ene er tangent til banen og forårsaker at størrelsen av farten endres, mens den andre står vinkelrett på banen og får hastighetsvektoren til å endre retning.

Figuren til venstre viser hvordan tyngdekraften $\mathbf{F} = m\cdot\mathbf{g}$ kan dekomponeres slik at *en* komponent endrer størrelsen av hastigheten mens den andre komponenten endrer retningen.

3.5.2. Sirkelbevegelse.

Vi skal nå se på en partikkel som beveger seg med *konstant* fart v i en sirkel med radius R.
Siden farten er konstant, blir $\frac{dv}{dt} = 0$ slik at Newtons 2. lov reduseres til:

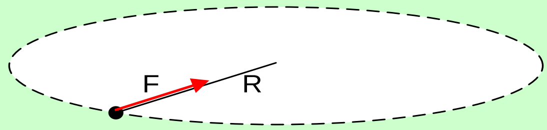
Når en partikkel med masse m beveger seg i en sirkel med radius R, virker det en kraft med størrelse

$$F = m\cdot\frac{v^2}{R}$$

innover mot sirkelens sentrum. Denne kraften kalles ***sentripetalkraft.***

Eksempel 3.5.1: Ei kule med masse $m = 0.10\,\mathrm{kg}$ er festet i ei snor, og roterer med konstant fart i en horisontal sirkelbane med radius $R = 0.10\,\mathrm{m}$ på et friksjonsfritt underlag. Snora et horisontal. Kula bruker 24 sekunder på 100 omdreininger. Hvor stor kraft virker det i snora?

Løsning: Det virker tre krefter på kula: Tyngden av kula, en kraft fra underlaget mot kula, og trekk-kraften i snora. Men siden kula ikke har noen akselerasjon i vertikal retning, må tyngden og kraften fra underlaget mot kula være motsatt like store. For oversiktens skyld er de ikke tatt med på figuren nedenfor. Det er da bare trekk-kraften F i snora som gir akselerasjon. Denne kraften gir en sentripetalakselerasjon. Tiden på en rotasjon er



$$T = \frac{24\,\mathrm{s}}{100} = 0.24\,\mathrm{s}.$$

Da er sentripetalakselerasjonen

$$a_N = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0.10\,\mathrm{m}}{(0.24\,\mathrm{s})^2} = \underline{68.5\,\mathrm{m/s^2}}.$$

Kraften i snora blir

$$F = m \cdot a_N = 0.10\,\mathrm{kg} \cdot 68.5\,\mathrm{m/s^2} = \underline{\underline{6.85\,\mathrm{N}}}.$$

Resonnementet ovenfor benyttes når vi analyserer ***kjeglependelen***. Dette finner du i kap. 3.7.2.

Nå skal vi bevege oss ut på glattisen med bil:

Eksempel 3.5.2: En bil kjører i en sving med svingradius $R = 50\,\mathrm{m}$. Veien og veibanen er horisontal. Det er is på veien, slik at friksjonstallet mellom bilhjul og veibane er $\mu = 0.15$. Hva er den største farten bilen kan ha uten å skrense i svingen?

Løsning: Når bilen kjører med en fart v i svingen, er det en sentripetalakselerasjon

$$a_N = \frac{v^2}{R}.$$

Da må det virke en sentripetalkraft

$$F = ma_N = m\frac{v^2}{R}$$

inn mot sentrum i den sirkelen som svingen er en del av. Så lenge veibanen er horisontal, må friksjonen mellom hjul og veibane utgjøre denne sentripetalkraften. Vi må da kreve at

$$\cancel{m}\frac{v^2}{R} \le \mu \cancel{m} g \quad \Leftrightarrow \quad v^2 \le \mu g R \quad \Leftrightarrow \quad v \le \sqrt{0.15 \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 50\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{8.6\,\mathrm{m/s}}}.$$

Dette svarer til

$$8.6\,\mathrm{m/s} \cdot \frac{3600\,\mathrm{s/h}}{1000\,\mathrm{m/km}} = \underline{\underline{31\,\mathrm{km/h}}}.$$

Moderne veier konstrueres med *doserte* svinger. Da vil en normalkraft fra veibanen mot bilen hjelpe til med å holde bilen på plass i veibanen.

Oppgaver: 3.5.1.

I neste eksempel skal vi se på bevegelse i en vertikal sirkel.

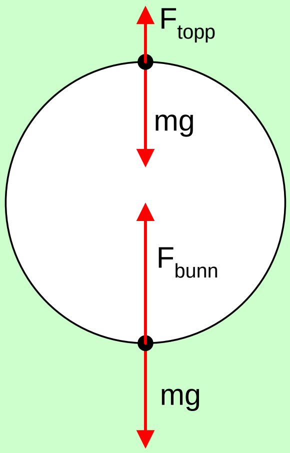
Eksempel 3.5.3: En passasjer på et pariserhjul beveger seg i en vertikal sirkel med konstant fart. Anta at passasjeren har massen $m = 60.0\,\mathrm{kg}$, at pariserhjulet har radien $R = 8.00\,\mathrm{m}$ og at perioden til sirkelbevegelsen er $T = 20.0\,\mathrm{s}$. Finn et uttrykk for kraften *fra* setet *på* passasjeren

a) I det øverste punktet i sirkelen.

b) I det nederste punktet i sirkelen.

Løsning: På figuren har vi erstattet passasjeren med et massepunkt (en partikkel). Denne partikkelen er hele tiden i en sirkelbevegelse, og har en sentripetalakselerasjon

$$a_N = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 8.00\,\mathrm{m}}{(20.0\,\mathrm{s})^2} \approx 0.790\,\mathrm{m/s^2}\,.$$



a) På toppen av sirkelbanen må sentripetalkraften virke nedover (inn mot sirkelens sentrum). Da er

$$mg - F_{\text{topp}} = ma_N$$

$$F_{\text{topp}} = mg - ma_N = m(g - a_N)$$

$$= 60.0\,\mathrm{kg}\,(9.81 - 0.79)\,\mathrm{m/s^2} = \underline{\underline{541\,\mathrm{N}}}$$

b) På bunnen av sirkelbanen må sentripetalkraften virke oppover (inn mot sirkelens sentrum). Da er

$$F_{\text{bunn}} - mg = ma_N$$

$$F_{\text{bunn}} = mg + ma_N = m(g + a_N)$$

$$= 60.0\,\mathrm{kg}\,(9.81 + 0.79)\,\mathrm{m/s^2} = \underline{\underline{636\,\mathrm{N}}}$$

3.6. Gravitasjon.

Eksperimenter viser at:

Når to punktformede masser m_1 og m_2 har innbyrdes avstand *R*, påvirker de hverandre med en like stor gjensidig tiltrekningskraft

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$$

der γ er *den universelle gravitasjonskonstanten* og har verdien

$$\gamma = 6.674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}\,.$$

Dersom massene ikke er punktformede, kan vi la *R* være avstanden mellom legemenes massesentre. For homogene, kuleformede legemer betyr dette avstanden mellom sentrene.

Dersom et punktformet legeme med massen *m* har en avstand *R* til jordas sentrum, og jordkloden har massen *M*, får vi at legemet trekkes mot jordas sentrum med en kraft

$$F = \gamma \frac{M \cdot m}{R^2}\,.$$

Men vi har allerede sagt at tyngdekraften har en størrelse

$$G = mg \,.$$

Det er innlysende at

$$G = F \quad \Leftrightarrow \quad mg = \gamma \frac{M \cdot m}{R^2} \quad \Leftrightarrow \quad g = \gamma \frac{M}{R^2} \,.$$

Eksempel 3.6.1: Beregn jordas masse når du vet at jordas radius er $R = 6.38 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Løsning: Kaller jordas masse *M*.

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} \quad \Leftrightarrow \quad M = \frac{gR^2}{\gamma} = \frac{9.81 \text{m/s}^2 \cdot \left(6.38 \cdot 10^6 \text{ m}\right)^2}{6.674 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2} = \underline{\underline{5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} \,.$$

Eksempel 3.6.2: En *geostasjonær* satellitt (for eksempel en TV-satellitt) holder seg i samme posisjon sett fra jorda fordi den ligger i ekvatorplanet og roterer en gang rundt jorda samtidig som jorda roterer en gang om sin egen akse. Hvor langt fra jordsenteret må en slik satellitt plasseres?

Løsning: Gravitasjonskraften fungerer som sentripetalkraft på satellitten. Dersom satellitten har masse *m* og ligger i en avstand *x* fra jordas sentrum, blir

$$\cancel{m} \cdot \frac{4\pi^2 x}{T^2} = \gamma \frac{M \cdot \cancel{m}}{x^2}$$

$$x^3 = \frac{\gamma M T^2}{4\pi^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \left(24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}\right)^2}{4\pi^2} = 7.55 \cdot 10^{22} \text{ m}^3$$

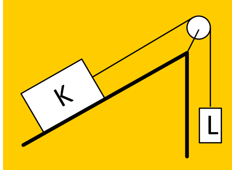
$$x = \sqrt[3]{7.55 \cdot 10^{22} \text{ m}^3} = \underline{\underline{4.23 \cdot 10^7 \text{ m}}}$$

**3.7. Mer kompliserte situasjoner.*

3.7.1. To sammenbundne legemer.

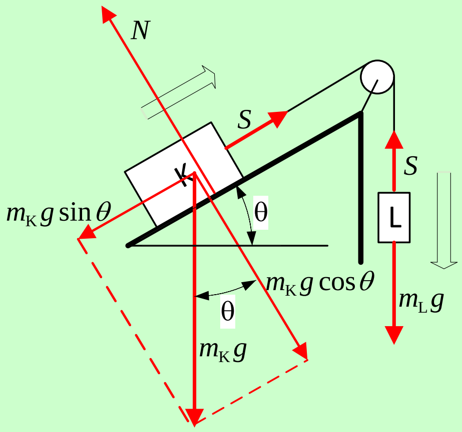
I eksempel 3.3.4. så vi på en kloss som ble trukket langs ei bordplate av ei snor som var festet til et lodd. Nå skal vi se på en mer komplisert versjon av denne problemstillingen ved at vi lar loddet trekke klossen oppover et skråplan.

Eksempel 3.7.1:



En kloss med masse $m_K = 1.50 \text{ kg}$ ligger på et skråplan som har helningsvinkel 30° slik figuren til venstre viser. Ei masseløs, ustrekkelig snor går fra klossen parallelt med skråplanet, over ei trinse og til et lodd L med masse $m_L = 0.50 \text{ kg}$. Loddet prøver å trekke klossen oppover. Hvor stor blir akselerasjonen nå, og hvor stor blir kraften i snora? Se fremdeles bort fra friksjon.

Løsning:



Vi vet ikke om loddet vil trekke klossen bli oppover skråplanet, eller om klossen vil gli nedover og trekke loddet oppover. Men vi gjetter på at bevegelsene blir som vist på figuren til venstre. Dersom vi gjetter galt, får vi negativ akselerasjon.

Vi benytter at snordraget S og akselerasjonen a er like stor både for klossen og loddet.

For loddet nøyer vi oss med å sette opp Newtons 2. lov i vertikal retning, med positiv retning nedover:

$$m_L g - S = m_L a \,.$$

For klossen er det mer komplisert. Vi legger inn en x-akse med positiv retning opp langs skråplanet, og y-akse vinkelrett på skråplanet.

Da blir Newtons 2. lov for klossen:

$$\begin{bmatrix} S - m_K g \sin\theta \\ N - m_K g \cos\theta \end{bmatrix} = m_K \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Til sammen har vi nå tre likninger med S, N og a som ukjente. Vi er ikke interessert i N, og ser på de to andre likningene:

$$m_L g - S = m_L a$$

$$S - m_K g \sin\theta = m_K a$$

Dette systemet løses enklest med å legge sammen likningene:

$$m_L g - m_K g \sin\theta = m_L a + m_K a$$

$$(m_L - m_K \sin\theta) g = (m_L + m_K) a$$

$$a = \frac{(m_L - m_K \sin\theta) g}{m_L + m_K} = \frac{0.50\,\text{kg} - 1.50\,\text{kg} \cdot \sin 30^\circ}{0.50\,\text{kg} + 1.50\,\text{kg}} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 = \underline{\underline{-1.23\,\text{m/s}^2}}$$

Dette betyr at akselerasjonen går motsatt vei av det vi gjettet på i starten.
Så var det snorkraften S:

$$m_L g - S = m_L a$$

$$S = m_L g - m_L a = 0.50\,\text{kg} \cdot (9.81\,\text{m/s}^2 - (-1.23\,\text{m/s}^2)) = \underline{\underline{5.52\,\text{N}}}$$

3.7.2. Kjeglependel.

Kjeglependelen framkommer når ei lita kule (som vi betrakter som en partikkel) henges opp i enden av ei masseløs snor. Kula settes i sirkelbevegelse slik at snora beskriver ei kjegleflate. Vi skal nå se nærmere på en slik pendel.

Eksempel 3.7.2: Ei kule med masse m henges opp i ei snor med lengde L. Vi får en kjeglependel når kula settes i sirkelbevegelse med konstant fart slik at snora danner en konstant vinkel θ med vertikalen. Finn svingetiden T for en hel svingning, og finn kraften i snora.

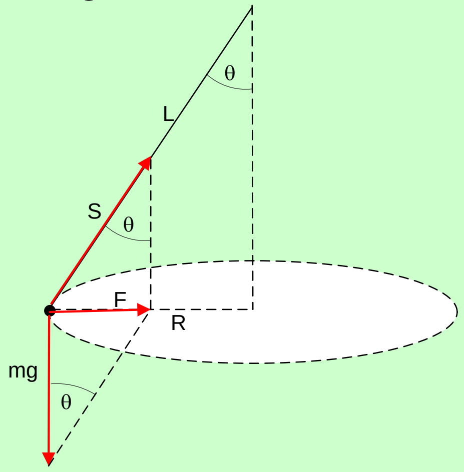
Løsning:
Når kula går i en sirkelbane med radius R, får den en sentripetalakselerasjon. Men nå virker ikke snorkraften rett inn mot sirkelens sentrum. Figuren nedenfor viser at de to kreftene som

virker, er tyngden $G = mg$ og snordragskraften S. Vektorsummen av disse to kreftene må da være den kraften F som virker inn mot sentrum.

Av figuren nedenfor ser vi at radien R i sirkelen er

$$R = L \cdot \sin\theta \, .$$

Vi ser også at kraften F inn mot sentrum i sirkelen er



$$F = mg\tan\theta \, .$$

Men siden F er en sentripetalkraft, er

$$F = m \cdot a_N = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} \, .$$

Vi setter disse to uttrykkene lik hverandre, og får

$$\cancel{m} g\tan\theta = \cancel{m}\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad g\frac{\cancel{\sin\theta}}{\cos\theta} = \frac{4\pi^2\left(L\cancel{\sin\theta}\right)}{T^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 L\cos\theta}{g}$$

Svingetiden blir altså

$$\underline{\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}}} \, .$$

Av figuren ser vi også at

$$F = mg\tan\theta = S\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad S = \frac{mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta} = \frac{mg}{\underline{\underline{\sin\theta}}} \, .$$

Her er det uttrykket for T som er mest interessant. Vi ser bl.a. at:

- Massen m inngår ikke i formelen for T. Dette betyr at svingetiden er uavhengig av kulas masse.
- Dersom θ er liten, er $\cos\theta \approx 1$. Da blir
  $$T \approx 2\pi\sqrt{\tfrac{L}{g}} \, .$$
- Vi kan også si at $L\cos\theta$ er høyden H fra opphengingspunktet til sirkelens sentrum. Da blir
  $$\underline{\underline{T = 2\pi\sqrt{\tfrac{H}{g}}}} \, .$$
- Av formelen
  $$T \approx 2\pi\sqrt{\tfrac{L}{g}}$$
  får vi
  $$g \approx \frac{4\pi^2 L}{T^2} \, .$$

Denne formelen kan brukes til å finne tyngdens akselerasjon g med stor nøyaktighet.

3.8. Sammendrag.

Symbol:	*Norsk betegnelse:*	*Engelsk betegnelse:*
F	kraft	force
G	tyngdekraft	gravitational force
N	normalkraft	normal force
μ_s	statisk friksjonstall	coeffisient of static friction
μ_k	kinetisk friksjonstall	coeffisient of kinetic friction
F_f	friksjonskraft	friction force
γ	gravitasjonskonstant	gravitational constant

Krefter er vektorer.

Newtons 1. lov: Et legeme bevarer sin hastighet dersom summen av kreftene som virker på det er lik null.

Newtons 2. lov: $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, der **F** er summen av kreftene som virker på et legeme med masse *m*.

Newtons 3. lov: Dersom et legeme virker på et annet med en kraft **F**, virker det andre legemet tilbake på det første med en motsatt like stor kraft $-\mathbf{F}$.

Tyngdekraften $G = mg$ der *m* er massen og *g* er tyngdens akselerasjon.

$\mu_s = \frac{F_f}{N}$ der F_f er den største trekk-kraften som kan virke på et legeme som ligger på et horisontalt underlag uten at legemet begynner å gli.

$\mu_d = \frac{F_f}{N}$ der F_f er den trekk-kraften som må til for at et legeme glir med konstant fart på et horisontalt underlag.

$\mu_s \geq \mu_d$.

Viskøs friksjon: $F_f \approx k_1 \cdot v$ ved lav fart, $F_f \approx k_2 \cdot v^2$ ved høy fart.

Sentripetalkraft: $F = m\frac{v^2}{R}$ der *R* er radien i krumningssirkelen.

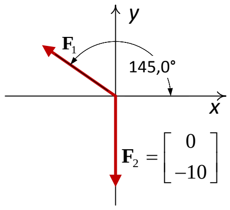
Tiltrekningskraft mellom to legemer: $F = \gamma \frac{M \cdot m}{R^2}$ der *M* og *m* er legemenes masser, *R* er avstanden mellom massesentrene.

*Kjeglependel: Svingetiden er $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$ der *l* er pendellengden og θ er snoras vinkel med vertikalen.

3.9. Oppgaver med løsninger.

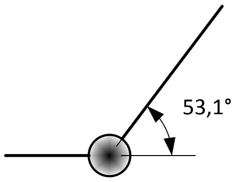
3.9.1. Småoppgaver i teksten.

Oppgave 3.1.1:



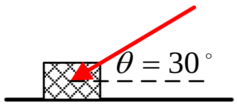
På figuren til venstre er $|\mathbf{F}_1| = 8.0\,\text{N}$, og kraften danner en vinkel på 145.0° med positiv *x*-akse. Kraften $\mathbf{F}_2$ er angitt på figuren (i Newton). Finn størrelse og retning for en kraft **F** som er slik at summen av $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ og **F** blir lik null.

Oppgave 3.3.1:

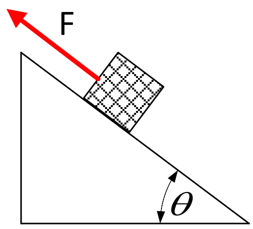


Ei kule med masse $m = 50.0\,\text{kg}$ henger i to tau. Det ene danner en vinkel på 53.1° med horisontalplanet, mens det andre er horisontalt slik figuren til venstre viser. Finn kraften som virker i hver av tauene.

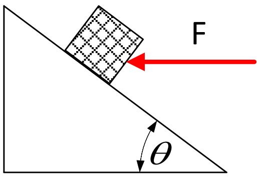
Oppgave 3.3.2:



a) En kloss med masse $m = 0.50\,\text{kg}$ ligger på et horisontalt, friksjonsfritt underlag. Vi skyver på klossen med en kraft $F = 1.50\,\text{N}$ som danner en vinkel på $\theta = 30^\circ$ nedover mot underlaget slik figuren til venstre viser. Tegn inn alle kreftene som virker på klossen, og finn klossens akselerasjon.

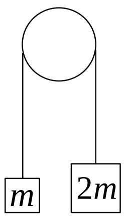


b) Klossen med masse $m = 0.50\,\text{kg}$ legges nå på et skråplan som danner en vinkel $\theta = 36.9^\circ$ med horisontalplanet. Vi trekker klossen med en kraft $F = 3.50\,\text{N}$ som har retning oppover langs skråplanet, parallelt med planet slik figuren til venstre viser. Hvor stor akselerasjon får klossen?



c) Istedenfor å trekke klossen oppover dette skråplanet, skyver vi klossen med en horisontal kraft $F = 3.50\,\text{N}$ som figuren viser. Hvor stor akselerasjon får klossen nå, og hvor stor blir normalkraften fra skråplanet mot klossen?

Oppgave 3.3.3:



To klosser med masser henholdsvis m og $2m$ er festet til hver sin ende av ei masseløs snor som lagt over ei trinse slik figuren til venstre viser. Se bort fra alle former for friksjon. Hvor stor akselerasjon får klossene når de slippes?

Oppgave 3.4.1:

Vi skal nå la en kloss gli på et skråplan som har helningsvinkel θ. Friksjonstallet mellom kloss og skråplan er μ. Vi skiller ikke mellom statisk og kinetisk friksjon.

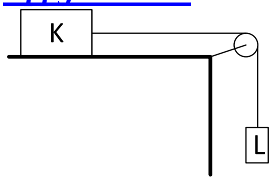
a) Det viser seg at når helningsvinkelen er $\theta = 22^\circ$ kan klossen gli med konstant fart nedover skråplanet. Finn friksjonstallet μ.

I resten av oppgaven lar vi μ ha den verdien du fant ovenfor.

b) Vi setter helningsvinkelen til $\theta_1 = 30^\circ$. Hvor stor akselerasjon får klossen nå?

c) Vi setter helningsvinkelen til $\theta_2 = 18^\circ$, og gir klossen fart oppover skråplanet. Hvor stor akselerasjon har klossen mens den glir oppover?

***Oppgave 3.4.2*:**



Vi går tilbake til eksempel 3.3.4, der en kloss K var bundet sammen med et lodd L, og snora går over ei trinse som vist på figuren til venstre. Men nå skal vi anta at friksjonstallet mellom kloss og bord er μ.

a) Bestem akselerasjonen når $\mu = 0.25$.

b) Hva er den største verdien μ kan ha for at klossen skal sette seg i bevegelse når systemet slippes?

***Oppgave 3.4.3*:**

Gå tilbake til eksempel 3.4.1.b), og finn den verdien av vinkelen θ som gir minst trekk-kraft.

Oppgave 3.5.1:

En vinterdag med glatte veier vil du teste bilens bremse-evne. Mens bilen kjører på horisontal vei med $36\,\mathrm{km/h}$, tråkker du inn bremsene og ser at det tar 5.0 sekunder fra bremsene begynner å virke og til bilen har stoppet.

a) Finn friksjonstallet mellom bildekk og veibane.

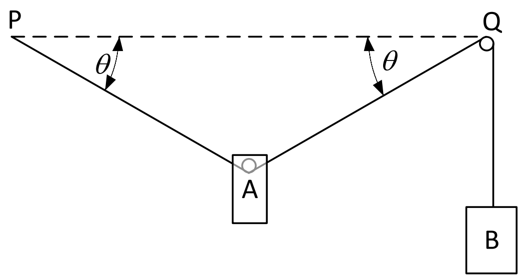
b) Hvor stor fart kan du ha gjennom en horisontal rundkjøring med svingradius 25 meter uten at bilen vil skli? Anta at friksjonstallet er det samme som du fant ovenfor.

3.9.2. Blandede oppgaver.

Oppgave 3.1:

En kraft $\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}\mathrm{N}$. En annen kraft $\mathbf{F}_2$ har størrelse 13.0 N. Summen av $\mathbf{F}_1$ og $\mathbf{F}_2$ blir en kraft $\mathbf{F}$ som danner en vinkel på 45° med positiv x-akse. Finn $\mathbf{F}_1$ og $\mathbf{F}$.

Oppgave 3.2:



Ei snor er festet i punktet P, og kan gli uten friksjon over ei lett trinse i punktet Q. En kloss A kan gli uten friksjon på snora. En kloss B er festet i enden av snora.
Tegn inn de kreftene som virker på klossene, og finn snoras vinkel θ med horisontalplanet uttrykt ved klossenes masser m_A og m_B når systemet er i likevekt.

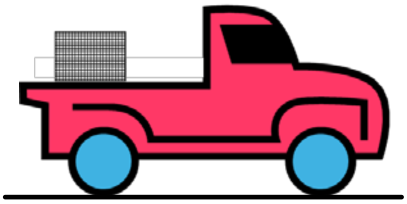
Oppgave 3.3:

En kloss A med masse m ligger på et skråplan. Friksjonstallet mellom kloss og skråplan er μ. Vi justerer helningsvinkelen θ slik at klossen glir nedover med konstant fart når den gis en liten dytt.

a) Vis at da er $\mu = \tan\theta$.

b) Vi beholder skråplanet med den samme helningsvinkelen, og binder kloss A sammen med en annen kloss B som har masse $\frac{1}{2}m$. Det er ikke friksjon mellom kloss B og skråplanet. Vi holder kloss A fast helt til kloss B kommer ro i sitt laveste punkt på skråplanet. Da er snora mellom klossene parallell med skråplanet. Så slipper vi klossene, slik at kloss B trekker kloss A nedover skråplanet. Hvor stor akselerasjon får klossene nå? Hvor stort blir snordraget?

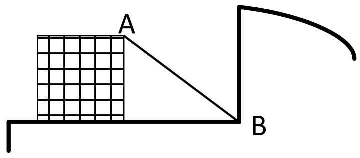
Oppgave 3.4:



En kasse ligger på et lasteplan. Friksjonstallet mellom kasse og lasteplan er $\mu = 0.20$, og vi skiller ikke mellom statisk og kinetisk friksjon. Lasteplanet er hele tiden horisontalt.

a) Kassen ligger på lasteplanet uten noen surring.
   1) Hva er den største akselerasjonen bilen kan ha uten at kassen begynner å gli?
   2) Bilen kjører med konstant fart i en sving med svingradius $R = 20\,\text{m}$. Hva er den største farten bilen kan ha uten at kassen begynner å gli?

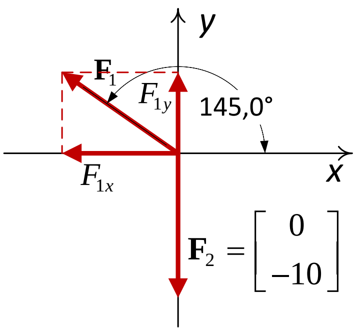
b)



Kassen sikres med et tau A-B fra toppen av kassen til lasteplanet slik figuren viser. Tauet er $1.00\,\text{m}$ langt, og kassen er $0.60\,\text{m}$ høy. Hvor stor er strekk-kraften i tauet når bilens akselerasjon er $a = 4.00\,\text{m/s}^2$, og kassens masse er $m = 100\,\text{kg}$? Lasteplanet er fremdeles horisontalt.

3.9.3. Løsninger på småoppgaver i teksten.

Oppgave 3.1.1:



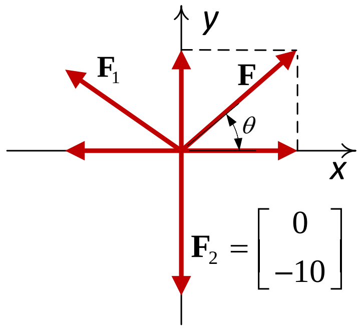
Starter med å dekomponere $\mathbf{F}_1$:

$$F_{1x} = F_1 \cos 145^\circ = 8.0\,\text{N} \cdot \cos 145^\circ = \underline{-6.55\,\text{N}}.$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 145^\circ = 8.0\,\text{N} \cdot \sin 145^\circ = \underline{4.6\,\text{N}}.$$

Skal finne $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$ slik at

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6.55 \\ 4.6 \end{bmatrix}\text{N} + \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix}\text{N} + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\text{N}.$$



Dette gir

$$-6.55\,\mathrm{N} + 0\mathrm{N} + F_x = 0\mathrm{N} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{F_x = 6.55\,\mathrm{N}},$$

$$4.6\,\mathrm{N} - 10\,\mathrm{N} + F_y = 0\,\mathrm{N} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{F_y = 5.4\,\mathrm{N}}.$$

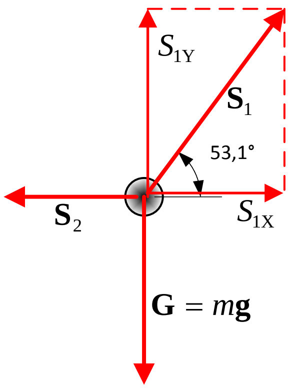
Da blir

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} = \sqrt{(6.55\,\mathrm{N})^2 + (5.4\,\mathrm{N})^2} = \underline{\underline{8.5\,\mathrm{N}}}.$$

Vinkelen θ med positiv x-akse blir:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{5.4\,\mathrm{N}}{6.55\,\mathrm{N}} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \underline{\underline{39.5^\circ}}.$$

Oppgave 3.3.1:



Kaller kreftene i de to tauene for $\mathbf{S}_1$ og $\mathbf{S}_2$ slik figuren til venstre viser. $\mathbf{S}_1$ dekomponeres i de to komponentene $S_{1\mathrm{X}}$ og $S_{1\mathrm{Y}}$, og skriver for enkelhets skyld S_1 istedenfor $|\mathbf{S}_1|$ og tilsvarende for $\mathbf{S}_2$. Siden kula henger i ro, får vi at

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} S_{1\mathrm{X}} \\ S_{1\mathrm{Y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir de to likningene

$$S_{1\mathrm{X}} - S_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \cos 53.1^\circ = S_2 \quad \Leftrightarrow \quad S_2 = 0.60 S_1$$

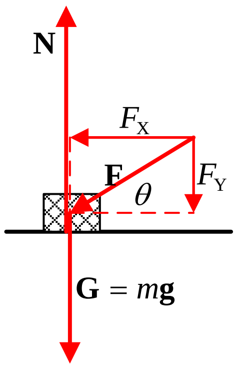
$$S_{1\mathrm{Y}} - mg = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_{1\mathrm{Y}} = mg \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \sin 53.1^\circ = mg$$

$$\Leftrightarrow \quad S_1 \cdot 0.80 = mg \quad \Leftrightarrow \quad S_1 = \frac{50.0\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}}{0.80} = \underline{\underline{613\,\mathrm{N}}}$$

Da blir

$$S_2 = 0.60 S_1 = 0.60 \cdot 613\,\mathrm{N} = \underline{\underline{368\,\mathrm{N}}}.$$

Oppgave 3.3.2:



a) I tillegg til kraften **F** må det virke en tyngdekraft $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, og en normalkraft **N** opp fra underlaget. Merk at **N** må være større enn **G** fordi y-komponenten av **F** virker nedover sammen med **G.**

Setter opp Newtons 2. lov, og benytter at klossen kun kan bevege seg i x-retningen:

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{G} = m \cdot \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -F_\mathrm{X} \\ -F_\mathrm{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir de to komponentlikningene

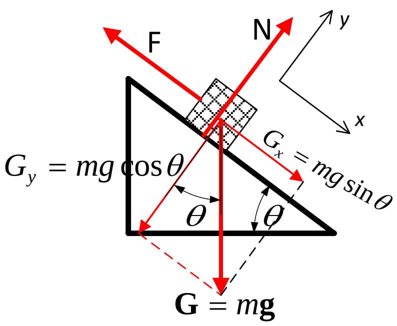
$$-F_\mathrm{X} = ma \quad \Leftrightarrow \quad -F\cos\theta = ma$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{-1.50\,\mathrm{N} \cdot \cos 30^\circ}{0.50\,\mathrm{kg}} = \underline{\underline{-2.60\,\mathrm{m/s^2}}}$$

Minustegnet skyldes at akselerasjonen går i negativ retning.

$$-F_\mathrm{Y} + N - mg = 0$$

$$N = F_\mathrm{Y} + mg = F\sin\theta + mg = 1.50\,\mathrm{N} \cdot \sin 30^\circ + 0.50\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{\underline{5.7\,\mathrm{N}}}$$



b) Siden klossen må bevege seg langs skråplanet, legger jeg inn et koordinatsystem som vist på figuren. De tre kreftene som virker er da

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -F \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Da blir Newtons 2. lov:

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{G} = m \cdot \mathbf{a}$$

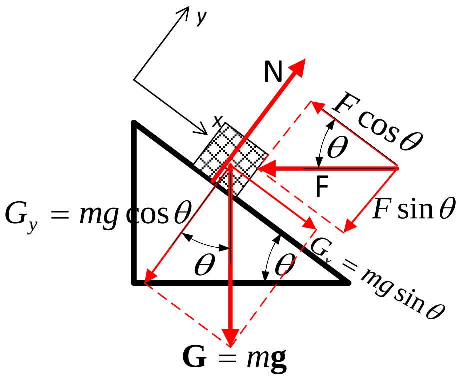
$$\begin{bmatrix} -F + mg\sin\theta \\ N - mg\cos\theta \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Siden vi skal finne akselerasjonen, er det bare *x*-komponenten som interesserer oss:

$$-F + mg\sin\theta = m \cdot a$$

$$a = g\sin\theta - \frac{F}{m} = (9.81\,\text{m/s}^2) \cdot \sin 36.9^\circ - \frac{3.50\,\text{N}}{0.50\,\text{kg}} = \underline{\underline{-1.1\,\text{m/s}^2}}.$$

Klossen får altså en akselerasjon med størrelse $1.1\,\text{m/s}^2$ med retning oppover langs skråplanet.



c) Benytter samme koordinatsystem som før. Men nå må jeg også dekomponere **F**:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -F\cos\theta \\ -F\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Da blir Newtons 2. lov:

$$\begin{bmatrix} -F\cos\theta \\ -F\sin\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi finner *a* ved å se på *x*-komponenten:

$$-F\cos\theta + mg\sin\theta = m \cdot a$$

$$a = g\sin\theta - \frac{F\cos\theta}{m} = (9.81\,\text{m/s}^2) \cdot \sin 36.0^\circ - \frac{(3.50\,\text{N}) \cdot \cos 36.9^\circ}{0.50\,\text{kg}} = \underline{\underline{0.29\,\text{m/s}^2}}$$

Kraften **F** er altså ikke stor nok til å skyve klossen oppover skråplanet. Tvert imot får klossen en akselerasjon med størrelse $0.29\,\text{m/s}^2$ nedover skråplanet.

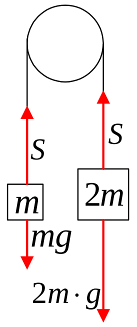
Vi finner normalkraften ved å bruke *y*-komponenten:

$$-F\sin\theta - mg\cos\theta + N = 0$$

$$N = F\sin\theta + mg\cos\theta$$

$$= (0.35\,\text{N}) \cdot \sin 36.9^\circ + (0.50\,\text{kg}) \cdot (9.81\,\text{m/s}^2) \cdot \cos 36.9^\circ = \underline{\underline{4.1\,\text{N}}}$$

Oppgave 3.3.3:



Når klossene slipes, vil den minste klossen trekkes oppover med akselerasjon a, mens den største trekkes nedover med like stor akselerasjon. Snordraget S er like stort for begge klossene. Velger derfor positiv retning oppover for den minste klossen. For denne klossen blir

$$S - mg = ma\,.$$

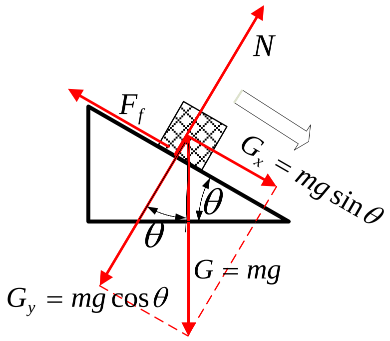
Velger positiv retning nedover for den største klossen. For denne klossen blir

$$2m \cdot g - S = 2m \cdot a\,.$$

Legger sammen disse to likningene, og får

$$-mg + 2mg = m + 2ma \quad \Leftrightarrow \quad g = 3a \quad \Leftrightarrow \quad a = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}g}}\,.$$

Oppgave 3.4.1:



Antar at klossen glir nedover langs skråplanet. Legger x-akse nedover langs skråplanet, og y-akse vinkelrett opp fra skråplanet. Da er det kun tyngden som må dekomponeres. Newtons 2. lov blir:

$$\begin{bmatrix} G_x - F_f \\ N - G_y \end{bmatrix} = m \cdot \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vet at $F_f = \mu N$. Får da de to likningene

$$mg\sin\theta - \mu N = ma$$

og

$$N - mg\cos\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N = mg\cos\theta\,.$$

Setter dette inn i den første likningen:

$$mg\sin\theta - \mu \cdot mg\cos\theta = ma \quad \Leftrightarrow \quad a = (\sin\theta - \mu\cos\theta)g\,.$$

a) Når klossen glir med konstant fart, er

$$a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\theta - \mu\cos\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \underline{\tan\theta} = \tan 22^\circ = \underline{\underline{0.40}}\,.$$

b) Når helningsvinkelen er $\theta_1 = 30^\circ$, blir

$$a = (\sin\theta_1 - \mu\cos\theta_1)g = (\sin 30^\circ - 0.40 \cdot \cos 40^\circ) \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{\underline{1.5\,\mathrm{m/s^2}}}\,.$$

c) Når klossen glir oppover skråplanet, virker friksjonskraften nedover. Newtons 2. lov blir

$$\begin{bmatrix} G_x + F_f \\ N - G_y \end{bmatrix} = m \cdot \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får fremdeles at

$$N = mg\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad F_f = \mu N = \mu mg\cos\theta\,.$$

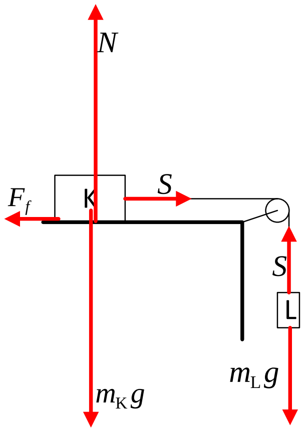
Men i x-retningen blir

$$mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta = ma$$

$$a = (\sin\theta + \mu\cos\theta)g = (\sin 18^\circ + 0.40 \cdot \cos 18^\circ) \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{\underline{6.8\,\mathrm{m/s^2}}}$$

Denne akselerasjonen har positiv retning nedover mens klossen glir oppover, og vil således bidra til å redusere klossens fart.

Oppgave 3.4.2:



Vi benytter samme framgangsmåte som i eksempel 3.3.4, og nøyer oss med å sette opp Newtons 2. lov i bevegelsesretningene:

For loddet: $m_L g - S = m_L \cdot a$.
For klossen: $S - F_f = m_K \cdot a$.

Siden bordplata er horisontal, er
$$N - m_K \cdot g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N = m_K \cdot g$$
slik at
$$F_f = \mu N = \mu \cdot m_K g \, .$$
Da blir Newtons 2. lov for klossen:
$$S - \mu \cdot m_K g = m_K \cdot a \, .$$
Vi legger denne likningen sammen med Newtons 2. lov for loddet, og får
$$m_L g - \mu \cdot m_K g = m_L a + m_K a$$
$$a = \frac{(m_L - \mu \cdot m_K)g}{m_L + m_K} = \frac{(0.50 - 0.25 \cdot 1.50)\text{kg}}{(0.50 + 1.50)\text{kg}} \cdot 9.81\text{m/s} = \underline{\underline{0.61\text{m/s}^2}}$$
Dersom systemet ikke skal gli, er akselerasjonen $a = 0$. Dette betyr at
$$m_L - \mu \cdot m_K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{m_L}{m_K} = \frac{0.50\,\text{kg}}{1.50\,\text{kg}} = \underline{\underline{0.33}}.$$

Oppgave 3.4.3:
I eksemplet kom vi fram til at trekk-kraften er gitt ved
$$F = \frac{mg}{\sin\theta + \frac{1}{\mu}\cos\theta}.$$
Vi vet at F er minst når $\frac{dF}{d\theta} = 0$:
$$F = mg\left(\sin\theta + \tfrac{1}{\mu}\cos\theta\right)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{dF}{d\theta} = mg \cdot (-1)\left(\sin\theta + \tfrac{1}{\mu}\cos\theta\right)^{-2} \cdot \left(\cos\theta + \tfrac{1}{\mu}(-\sin\theta)\right).$$
$$\tfrac{dF}{d\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta + \tfrac{1}{\mu}(-\sin\theta) = 0$$
$$\mu = \tfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\mu = \tan^{-1}0.469 = \underline{\underline{25.1^\circ}}$$

Oppgave 3.5.1:
a) Finner først akselerasjonen *a*:
$$v = v_0 + at \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0\,\text{m/s} - 36 \cdot \frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}}}{5.0\,\text{s}} = \underline{-2.0\,\text{m/s}^2}.$$
Så følger Newtons 2. lov, med positiv retning i fartsretningen slik at friksjonskraften blir negativ. Siden veibanen er horisontal, blir også normalkraften $N = m \cdot g$:
$$-F_f = -\mu N = -\mu mg = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{-a}{g} = \frac{-(-2.0\,\text{m/s}^2)}{9.81\,\text{m/s}^2} = \underline{\underline{0.20}}.$$

b) For at bilen ikke skal gli, må maksimal friksjonskraft være minst like stor som sentripetalkraften. Benytter også nå at $N = m \cdot g$ siden veibanen er horisontal:

$$\mu N = \mu mg \geq m\frac{v^2}{R} \quad \Leftrightarrow \quad v^2 \leq \mu gR$$

$$v \leq \sqrt{\mu gR} = \sqrt{0.20 \cdot \left(9.81\,\mathrm{m/s^2}\right) \cdot \left(25\,\mathrm{m}\right)} = \underline{\underline{7.0\,\mathrm{m/s}}}$$

3.9.4. Svar på blandede oppgaver.

Oppgave 3.1:

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3.2:

$$\sin\theta = \frac{m_\mathrm{A}}{2m_\mathrm{B}}.$$

Oppgave 3.3:

$$\mu = \tan\theta, \; a = \tfrac{1}{3}g\sin\theta, \; S = \tfrac{1}{3}mg\sin\theta.$$

Oppgave 3.4:

$$a = 1.96\,\mathrm{m/s^2}, \; v = 6.3\,\mathrm{m/s}, \; S = 222\,\mathrm{N}.$$