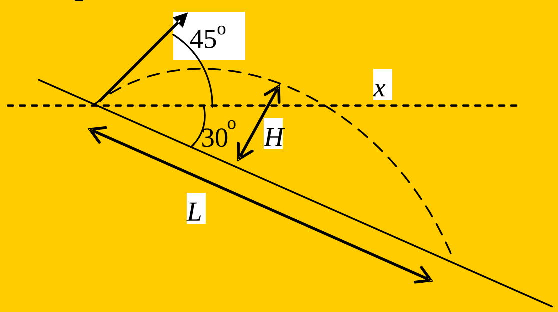
Skrått kast ned en bakke

Hittil har vi kastet ting på et horisontalt underlag. Dersom underlaget ikke er horisontalt, blir problemene verre slik eksemplet nedenfor viser.

Eksempel:



En stein kastes fra toppen av en bakke som heller nedover. Bakkens helningsvinkel er 30° med horisontalplanet. Steinen kastes med en startfart med størrelse $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$, og kastvinkel 45° over horisontalplanet. Finn kastlengden L og steinens største høyde H over bakken.

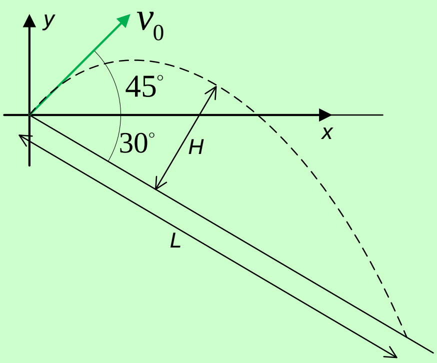
Problemet kan løses på (minst) to måter:

a) Ved å legge et koordinatsystem med x-aksen horisontalt og y-aksen vertikalt.

b) Ved å legge et koordinatsystem med x-aksen parallell med bakken og y-aksen vinkelrett på x-aksen.

Løsning:

a)



Legger koordinatsystemet som vist på figuren. Da blir bevegelseslikningene:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

$$= \begin{bmatrix} 10\,\mathrm{m/s}\cdot\cos 45^\circ \\ 10\,\mathrm{m/s}\cdot\sin 45^\circ \end{bmatrix}\cdot t + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} t^2$$

$$= \begin{bmatrix} 7.07\ \mathrm{m/s}\cdot t \\ 7.07\ \mathrm{m/s}\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t = \begin{bmatrix} 10\,\mathrm{m/s}\cdot\cos 45^\circ \\ 10\,\mathrm{m/s}\cdot\sin 45^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 7.07\,\mathrm{m/s} \\ 7.07\,\mathrm{m/s} - gt \end{bmatrix}$$

Bakken kan nå oppfattes som en rett linje gitt ved

$$\frac{y}{x} = \tan\left(-30^\circ\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y = -0.577x}\,.$$

Når kula treffer bakken, må x og y fra bevegelseslikningene passe inn i likningen for den rette linja:

$$7.07\ \mathrm{m/s}\cdot t - 4.91\ \mathrm{m/s^2}\cdot t^2 = -0.577\cdot 7.07\ \mathrm{m/s}\cdot t$$

$$\Leftrightarrow \quad 11.15\mathrm{m/s}\cdot t - 4.91\ \mathrm{m/s^2}\cdot t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{t = 0\mathrm{s}} \quad \vee \quad \underline{t = 2.27\ \mathrm{s}}$$

Det er kun den siste løsningen som er av interesse. Den gir

$$x = 7.07\ \mathrm{m/s}\cdot 2.27\ \mathrm{s} = \underline{16.05\ \mathrm{m}}\,.$$

$$y = -0.577x = -0.577\cdot 16.05\ \mathrm{m} = \underline{9.26\ \mathrm{m}}$$

Kastlengden blir

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(16.05\text{ m})^2 + (9.26\text{ m})^2} = \underline{\underline{18.5\text{ m}}}.$$

Kula har størst høyde over bakken når hastighetsvektoren er parallell med bakken, d.v.s. når

$$\frac{v_y}{v_x} = \tan(-30^\circ) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7.07\text{ m/s} - 9.81\text{ m/s}^2 \cdot t}{7.07\text{ m/s}} = -0.577$$

$$\Leftrightarrow \quad 7.07\text{ m/s} - 9.81\text{ m/s}^2 \cdot t = -4.08\text{ m/s} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t = 1.14\text{ s}}$$

slik at kulas posisjon er

$$x = 7.07\text{m/s} \cdot 1.14\text{ s} = \underline{8.06\text{ m}}$$

$$y = 7.07\text{ m/s} \cdot 1.14\text{ s} - 4.91\text{ m/s}^2 \cdot (1.14\text{ s})^2 = \underline{1.68\text{ m}}$$

En formel fra geometrien sier at avstanden fra et punkt (x_1, y_1) til linja

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

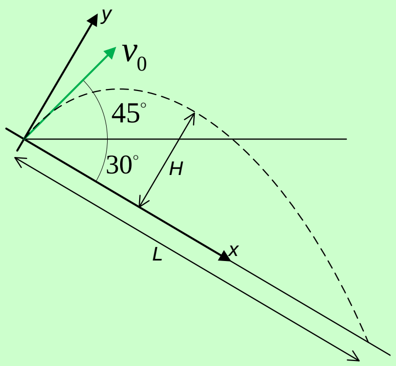
er gitt ved

$$d = \pm \frac{a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Anvendt på vårt problem blir

$$H = \pm \frac{0.577 \cdot 8.06\text{ m} + 1 \cdot 1.68\text{ m} + 0}{\sqrt{0.577^2 + 1^2}} = \underline{\underline{5.48\text{ m}}}.$$

b)



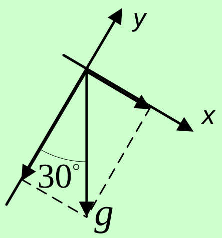
Legger koordinatsystemet med x-akse langs bakken som vist til venstre. I dette koordinatsystemet får starthastigheten en vinkel på

$$30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$$

med x-aksen, slik at

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 10\text{ m/s} \cdot \cos 75^\circ \\ 10\text{ m/s} \cdot \sin 75^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.59\text{ m/s} \\ 9.66\text{ m/s} \end{bmatrix}.$$

Akselerasjon må også dekomponeres (se figuren nedenfor til venstre):



$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} g \cdot \sin 30^\circ \\ -g \cdot \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.91\text{ m/s}^2 \\ -8.50\text{ m/s}^2 \end{bmatrix}.$$

Nå blir bevegelseslikningene:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 = \begin{bmatrix} 2.59\text{ m/s} \\ 9.66\text{ m/s} \end{bmatrix} \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4.91\text{ m/s}^2 \\ -8.50\text{ m/s}^2 \end{bmatrix} \cdot t^2$$

$$= \begin{bmatrix} 2.59\text{ m/s} \cdot t + 2.45\text{ m/s}^2 \cdot t^2 \\ 9.66\text{ m/s} \cdot t - 4.25\text{ m/s}^2 \cdot t^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t = \begin{bmatrix} 2.59\text{ m/s} \\ 9.66\text{ m/s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.91\text{ m/s}^2 \\ -8.50\text{ m/s}^2 \end{bmatrix} \cdot t = \begin{bmatrix} 2.59\text{ m/s} + 4.91\text{ m/s}^2 \cdot t \\ 9.66\text{ m/s} - 8.50\text{ m/s}^2 \cdot t \end{bmatrix}$$

I dette koordinatsystemet treffer kula bakken når

$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9.66\ \text{m/s} \cdot t - 4.25\ \text{m/s}^2 \cdot t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{t = 0\ \text{s}} \quad \vee \quad t = \frac{9.66\ \text{m/s}}{4.25\ \text{m/s}^2} = \underline{2.27\ \text{s}}$$

Da er kastlengden

$$L = 2.59\ \text{m/s} \cdot 2.26\ \text{s} + 2.45\ \text{m/s}^2 \cdot (2.26\ \text{s})^2 = \underline{\underline{18.37\ \text{m}}}\,.$$

Når høyden over bakken er størst, er

$$v_y = 0\ \text{m/s} \quad \Leftrightarrow \quad 9.66\ \text{m/s} - 8.50\ \text{m/s}^2 \cdot t = 0\ \text{m/s} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{9.66\ \text{m/s}}{8.50\ \text{m/s}^2} = \underline{1.14\ \text{s}}\,.$$

Da er høyden over bakken

$$H = 9.66\ \text{m/s} \cdot 1.14\ \text{s} - 4.25\ \text{m/s}^2 \cdot (1.14\ \text{s})^2 = \underline{\underline{5.49\ \text{m}}}\,.$$