2. Bevegelse.

Vi skal nå ta for oss ***bevegelse***. Vi skal definere de grunnleggende begrepene *posisjon*, *hastighet* (og *fart*), og *akselerasjon*. Dette er begrep som du benytter til daglig, men vi må presisere bruken av dem. Vær forberedt på at vi noen ganger bruker disse begrepene litt annerledes enn du er vant til fra dagligtalen.

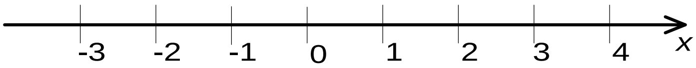
Vi starter forsiktig med *rettlinjet bevegelse*. Men vi må også se på bevegelse i planet og i rommet. Da er det smart å bruke *vektorer*. Selv om du i starten kanskje synes at vektor-formalismen er forvirrende, vil jeg anbefale at du lærer deg teknikken. På sikt vil bruk av vektorer forenkle både skrivemåte og løsing av mekanikk-problemer.

2.1. Rettlinjet bevegelse.

2.1.1. Posisjonen til en partikkel.

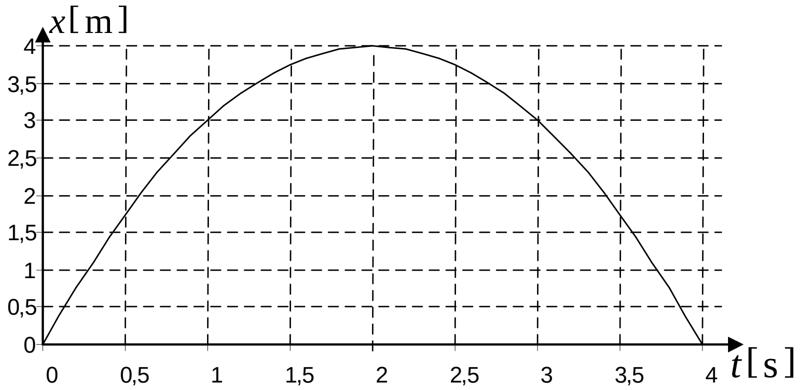
Vi skal nå beskrive bevegelsen til en *partikkel* som beveger seg langs en rett linje. En *partikkel* er et punktformet legeme, d.v.s. et legeme som har svært liten utstrekning. Da kan vi bl.a. neglisjere en eventuell rotasjon om legemets egen akse.

Vi starter med å legge inn en koordinatakse langs den linja som partikkelen følger. På denne aksen merker vi av et origo, en positiv retning, og en enhet.



Nå kan partikkelens posisjon angis entydig som et punkt *x* på denne aksen.

Posisjonen til partikkelen vil normalt endre seg med tiden. Dersom vi bruker symbolet *t* for tid og *x* for posisjon, har vi at *x* er en funksjon av *t*. Vi skriver $x = f(t)$ eller enklere $x(t)$.



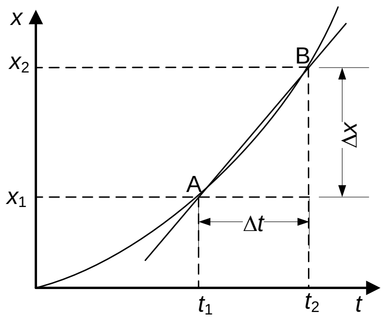
Det er ofte nyttig å vise sammenhengen mellom *x* og *t* i et koordinatsystem. Da avsetter vi *t* langs førsteaksen og *x* langs andreaksen. Grafen ovenfor viser bevegelsen til en partikkel som starter i origo ved $t = 0.0\,\mathrm{s}$, og går i positiv retning langs *x*-aksen i 2.0 sekunder. Da er partikkelen kommet til $x = 4.0\,\mathrm{m}$. Der snur den, og er tilbake i origo ved tidspunktet $t = 4.0\,\mathrm{s}$.

En slik graf kalles gjerne en *x*-*t*-graf. Merk at *x* er partikkelens *posisjon*, ikke den strekningen som partikkelen har tilbakelagt.

2.1.2. Fart.

Anta at du en dag vil måle farten til bilene som kjører forbi huset ditt. Den naturlige framgangsmåten er da å merke av to punkter x_1 og x_2 på veien, og måle avstanden $\Delta x = x_2 - x_1$ mellom disse punktene. Deretter finner du fram stoppeklokka, og måler hvor lang tid Δt en bil trenger for å kjøre denne strekningen. Ved å regne ut størrelsen $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, finner du hvor mange meter bilen i gjennomsnitt har kjørt pr sekund.

Vi bruker samme framgangsmåte når vi skal finne gjennomsnittsfarten til en partikkel. Anta at partikkelen befinner seg i en posisjon x_1 ved tidspunktet t_1, og i en posisjon x_2 ved tidspunktet t_2. Da definerer vi:



Gjennomsnittsfarten $\bar{v} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Du ser at gjennomsnittsfart måles i m/s.

I figuren ovenfor er Δx og Δt tegnet inn i en *x-t-graf*. Du ser at farten blir stigningstallet til den rette linja mellom start-tilstanden A og slutt-tilstanden B.

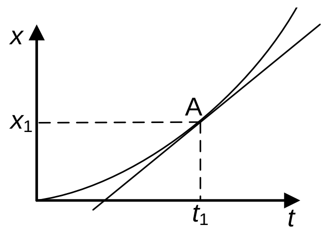
I praksis vil tidsintervallet Δt alltid være positivt. Da ser du at $\bar{v}$ er positiv dersom $\Delta x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 > x_1$, slik at partikkelen beveger seg i positiv retning. En negativ gjennomsnittsfart svarer til at $\Delta x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 < x_1$, slik at partikkelen beveger seg i negativ retning.

Eksempel 2.1.1: En bil bruker $\Delta t = 2.5\,\text{s}$ på å kjøre en strekning $\Delta x = 50\,\text{m}$. Finn bilens gjennomsnittsfart på strekningen.

Løsning: Gjennomsnittsfarten er

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{50\,\text{m}}{2.5\,\text{s}} = \underline{\underline{20\,\text{m/s}}}.$$

Definisjonen ovenfor gir oss bare *gjennomsnittsfarten* i tidsintervallet Δt. Vi er ofte mer interessert i *momentanfarten* ved et tidspunkt *t*. Da kan vi tenke oss at vi måler gjennomsnittsfarten over stadig kortere tidsintervall. Momentanfarten blir da grenseverdien for gjennomsnittsfarten når $\Delta t \to 0$. Ved å benytte det vi kan fra matematikken, får vi at:



Momentanfarten $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$.

Momentanfarten *v* blir da den deriverte av *x* med hensyn på *t*. I en *x*-*t*-graf svarer dette til stigningstallet til tangenten til grafen til $x(t)$ i punktet A. Situasjonen er illustrert ovenfor til venstre. Dersom det ikke kan misforstås, sir vi bare *fart* når vi mener momentanfart.

Eksempel 2.1.2: Anta at $x(t) = (4.0\,\text{m/s}) \cdot t$. Hvor stor er farten?

Løsning: Farten er

$$v = \frac{dx}{dt} = (4.0\,\text{m/s})\cdot\frac{dt}{dt} = (4.0\,\text{m/s})\cdot 1 = \underline{\underline{4.0\,\text{m/s}}}.$$

Legg merke til at i uttrykket $x(t) = (4.0\,\text{m/s})\cdot t$ har begge sider av likhetstegnet enhet *meter* fordi tiden *t* måles i sekund (s).

Dersom farten er konstant, har vi en enkel sammenheng mellom fart *v*, strekning *x* og tid *t*:

$$v = \frac{x}{t} \quad \Leftrightarrow \quad x = v\cdot t.$$

Eksempel 2.1.3: En bil kjører 1500 meter med konstant fart på $90\,\text{km/h}$. Hvor lang tid bruker bilen?

Løsning: Vi må først regne om farten til m/s:

$$90\,\text{km/h} = \frac{90\cdot 10^3\,\text{m}}{60\cdot 60\,\text{s}} = 25\,\text{m/s}.$$

$$v = \frac{x}{t} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x}{v} = \frac{1500\,\text{m}}{25\,\text{m/s}} = \underline{\underline{60\,\text{s}}}.$$

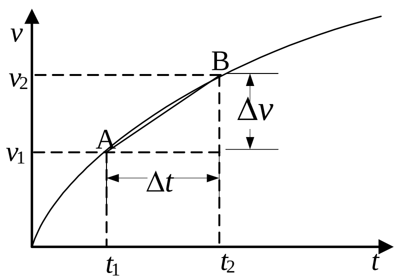
Oppgaver: 2.1.1, 2.1.2.

2.1.3. Akselerasjon.

Fra dagligtalen forbinder du sikkert begrepet *akselerasjon* med fartsøking. Vi trenger en mer presis definisjon. Vi definerer først *gjennomsnitts-akselerasjon* slik:

Dersom en partikkels fart endres fra v_1 til v_2 i løpet av et tidsintervall $\Delta t = t_2 - t_1$, er ***gjennomsnitts-akselerasjonen*** i dette tidsintervallet gitt ved

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$



Hvis vi avsetter farten *v* som funksjon av tiden *t* i et *v*-*t*-diagram, kan vi illustrere definisjonen ovenfor som vist til venstre. Gjennomsnitts-akselerasjonen blir stigningstallet til den rette linja gjennom A og B.

Siden Δv måles i m/s, og tid måles i s, får gjennomsnitts-akselerasjon benevning

$$\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \text{m/s}^2.$$

Dersom farten hele tiden er positiv, vil denne definisjonen bare være en presisering av dagligtalens intuitive bruk av begrepet *akselerasjon*. Men når farten blir negativ, kan vi få overraskelser som eksemplet nedenfor viser.

Eksempel 2.1.4: Finn den gjennomsnittlige akselerasjonen i disse tilfellene:
a) Farten endres fra $v_1 = 0.0\,\text{m/s}$ til $v_2 = 4.0\,\text{m/s}$ i løpet av et tidsintervall $\Delta t = 2.0\,\text{s}$.
b) Farten endres fra $v_1 = 8.0\,\text{m/s}$ til $v_2 = 2.0\,\text{m/s}$ i løpet av et tidsintervall $\Delta t = 6.0\,\text{s}$.
c) Farten endres fra $v_1 = -2.0\,\text{m/s}$ til $v_2 = -6.0\,\text{m/s}$ i løpet av et tidsintervall $\Delta t = 4.0\,\text{s}$.

Løsning:

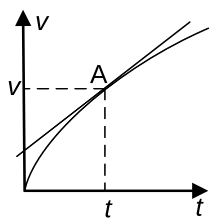
a) $\bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{4.0\,\text{m/s} - 0.0\,\text{m/s}}{2.0\,\text{s}} = \underline{\underline{2.0\,\text{m/s}^2}}$.

b) $\bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{2.0\,\text{m/s} - 8.0\,\text{m/s}}{6.0\,\text{s}} = \underline{\underline{-1.0\,\text{m/s}^2}}$.

c) $\bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{-6.0\,\text{m/s} - (-2.0\,\text{m/s})}{4.0\,\text{s}} = \underline{\underline{-1.0\,\text{m/s}^2}}$.

I del b av eksemplet ovenfor, ser du at når en positiv fart avtar, får vi en negativ akselerasjon. Dette kalles også *retardasjon*. Del c er mer spesiell. Der får partikkelen større fart i *negativ* retning. Akselerasjonen er også da negativ.

Vi definerer ***momentan akselerasjon*** (eller bare *akselerasjon*) på tilsvarende måte som for fart, ved at vi beregner gjennomsnitts akselerasjon over stadig kortere tidsintervall:



Dersom en partikkels fart endres med Δv løpet av et tidsintervall Δt, er ***akselerasjonen*** gitt ved

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Den momentane akselerasjonen *a* blir da den deriverte av *v* med hensyn på *t*. I en *v*-*t*-graf svarer dette til stigningstallet til tangenten til grafen til $v(t)$ i punktet A. Situasjonen er illustrert ovenfor. Dersom vi kjenner farten *v* som funksjon av *t*, kan vi finne akselerasjonen *a* ved å derivere $v(t)$ slik eksemplene nedenfor viser:

Eksempel 2.1.5: Finn akselerasjonen i disse tilfellene:
a) $v(t) = (3.0\,\text{m/s}^2)\cdot t - 4.0\,\text{m/s}$.
b) $v(t) = 5.0\,\text{m/s}\cdot\left(1 - e^{-(0.2\text{s}^{-1})\cdot t}\right)$.

Løsning:

a) $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = 3.0\,\text{m/s}^2 \cdot 1 - 0 = \underline{\underline{3.0\,\text{m/s}^2}}$.

b) $a(t)=\dfrac{dv(t)}{dt}=5.0\,\mathrm{m/s}\cdot\left(0-\left(-0.2\,\mathrm{s}^{-1}\right)e^{-\left(0.2\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot t}\right)=\underline{\underline{\left(1.0\,\mathrm{m/s}^2\right)\cdot e^{-\left(0.2\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot t}}}$.

I eksemplene ovenfor har jeg vært nøye med å få rett benevning. Dette fører til at uttrykkene kan bli lite oversiktlige. Noen ganger ser vi gjennom fingrene med slikt benevnings-pirk. Se for eksempel på eksponentialleddet $e^{-\left(0.2\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot t}$. Eksponenten må være et ubenevnt tall. Men vi vet at *t* har benevning sekund. Da må konstanten 0.2 ha benevning s^{-1}. Vi ser imidlertid ofte at slike eksponentialledd skrives mer oversiktlig som $e^{-0.2t}$, selv om dette gir gal benevning.

Ved å sammenholde definisjonene på fart og akselerasjon, finner vi denne sammenhengen:

Akselerasjon $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)=\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Akselerasjonen er altså den andrederiverte av posisjonen.

Oppgave: 2.1.3.

*2.1.4. Et større eksempel.

Vi skal nå gå gjennom et større eksempel, der vi får illustrert mange egenskaper ved posisjon, fart og akselerasjon.

Eksempel 2.1.6: Posisjonen til en partikkel er gitt ved

$$x(t)=\left(6.0\,\mathrm{m/s}^2\right)\cdot t^2-\left(1.0\,\mathrm{m/s}^3\right)\cdot t^3,\quad 0\,\mathrm{s}\le t\le 6\,\mathrm{s}\,.$$

a) Bestem gjennomsnittsfarten mellom $t_1=1.0\,\mathrm{s}$ og $t_2=3.0\,\mathrm{s}$.
b) Finn farten som funksjon av *t*. Hvor stor er farten når $t=2.0\,\mathrm{s}$?
c) Når er partikkelen lengst fra startpunktet? Hvor er partikkelen da?
d) Bestem gjennomsnitts akselerasjon mellom $t_1=1.0\,\mathrm{s}$ og $t_2=2.0\,\mathrm{s}$.
e) Finn akselerasjonen som funksjon av *t*. Hvor stor er akselerasjonen når $t=1.5\,\mathrm{s}$?
f) Når er farten størst, og hvor stor er denne farten?

Løsning:

a) $x(t_1)=x(1.0\,\mathrm{s})=\left(6.0\,\mathrm{m/s}^2\right)\cdot(1.0\,\mathrm{s})^2-\left(1.0\,\mathrm{m/s}^3\right)\cdot(1.0\,\mathrm{s})^3=\underline{5.0\,\mathrm{m}}$.

$x(t_2)=x(3.0\,\mathrm{s})=\left(6.0\,\mathrm{m/s}^2\right)\cdot(3.0\,\mathrm{s})^2-\left(1.0\,\mathrm{m/s}^3\right)\cdot(3.0\,\mathrm{s})^3=\underline{27.0\,\mathrm{m}}$.

$\bar{v}=\dfrac{x(3.0\,\mathrm{s})-x(1.0\,\mathrm{s})}{(3-1)\,\mathrm{s}}=\dfrac{(27.0-5.0)\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}}=\underline{\underline{11.0\,\mathrm{m/s}}}$.

b) $v(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}=\left(6.0\,\mathrm{m/s}^2\right)\cdot 2t-\left(1.0\,\mathrm{m/s}^3\right)\cdot 3t^2=\underline{\underline{\left(12.0\,\mathrm{m/s}^2\right)\cdot t-\left(3.0\,\mathrm{m/s}^3\right)\cdot t^2}}$.

$v(2.0\,\mathrm{s})=\left(12.0\,\mathrm{m/s}^2\right)\cdot(2.0\,\mathrm{s})-\left(3.0\,\mathrm{m/s}^3\right)\cdot(2.0\,\mathrm{s})^2=\underline{\underline{12.0\,\mathrm{m/s}}}$.

På grafen i slutten av eksemplet svarer dette til stigningstallet til tangenten på *x*-*t*-grafen når $t = 2.0\,\mathrm{s}$. Denne tangenten avviker litt fra den rette linja i del a).

c) Partikkelen er lengst fra startpunktet idet den snur. Da er farten *v* lik null, slik at vi må løse likningen

$$v(t) = \left(12.0\,\mathrm{m/s^2}\right)\cdot t - \left(3.0\,\mathrm{m/s^3}\right)\cdot t^2 = 0.0\,\mathrm{m/s}\,.$$

Vi løser den tilhørende likningen med bare tall-koeffisienter:

$$12t - 3t^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (12-3t)t = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{t=0} \quad\vee\quad \underline{t=4}\,.$$

Når $t = 0\,\mathrm{s}$, er også $x = 0\,\mathrm{m}$. Den eneste brukbare løsningen er derfor $t = \underline{\underline{4.0\,\mathrm{s}}}$.

Da er

$$x_{\mathrm{max}} = x(4.0\,\mathrm{s}) = \left(6.0\,\mathrm{m/s^2}\right)\cdot(4.0\,\mathrm{s})^2 - \left(1.0\,\mathrm{m/s^3}\right)\cdot(4.0\,\mathrm{s})^3 = \underline{\underline{32.0\,\mathrm{m}}}\,.$$

d)
$$v(1.0\,\mathrm{s}) = \left(12.0\,\mathrm{m/s^2}\right)\cdot(1.0\,\mathrm{s}) - \left(3.0\,\mathrm{m/s^3}\right)\cdot(1.0\,\mathrm{s})^2 = \underline{9.0\,\mathrm{m/s}}\,.$$

$$v(2.0\,\mathrm{s}) = \left(12.0\,\mathrm{m/s^2}\right)\cdot(2.0\,\mathrm{s}) - \left(3.0\,\mathrm{m/s^3}\right)\cdot(2.0\,\mathrm{s})^2 = \underline{12.0\,\mathrm{m/s}}\,.$$

$$\bar{a} = \frac{v(2.0\,\mathrm{s}) - v(1.0\,\mathrm{s})}{(2-1)\,\mathrm{s}} = \frac{(12.0-9.0)\,\mathrm{m/s}}{1.0\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{3.0\,\mathrm{m/s^2}}}\,.$$

På grafen svarer dette til stigningstallet til ei rett linje med stigningstall $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$.

e)
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\left(12.0\,\mathrm{m/s^2}\right)\cdot t - \left(3.0\,\mathrm{m/s^3}\right)\cdot t^2\right) = \left(12.0\,\mathrm{m/s^2}\right)\cdot 1 - \left(3.0\,\mathrm{m/s^3}\right)\cdot 2t$$

$$= \underline{\underline{12.0\,\mathrm{m/s^2} - \left(6.0\,\mathrm{m/s^2}\right)\cdot t}}$$

$$a(1.5\,\mathrm{s}) = 12.0\,\mathrm{m/s^2} - \left(6.0\,\mathrm{m/s^3}\right)\cdot(1.5\,\mathrm{s}) = \underline{\underline{3.0\,\mathrm{m/s^2}}}\,.$$

På grafen svarer dette til stigningstallet til tangenten på *v*-*t*-grafen når $t = 1.5\,\mathrm{s}$. Denne tangenten har samme stigningstall som linja i del d).

f) Farten $v(t)$ er størst når

$$\frac{dv}{dt} = 0.0\,\mathrm{m/s^2} \quad\Leftrightarrow\quad a = 0.0\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Løser den tilhørende likningen med tall-koeffisienter:

$$12.0 - 6.0t = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t = \underline{2.0}\,.$$

Da er

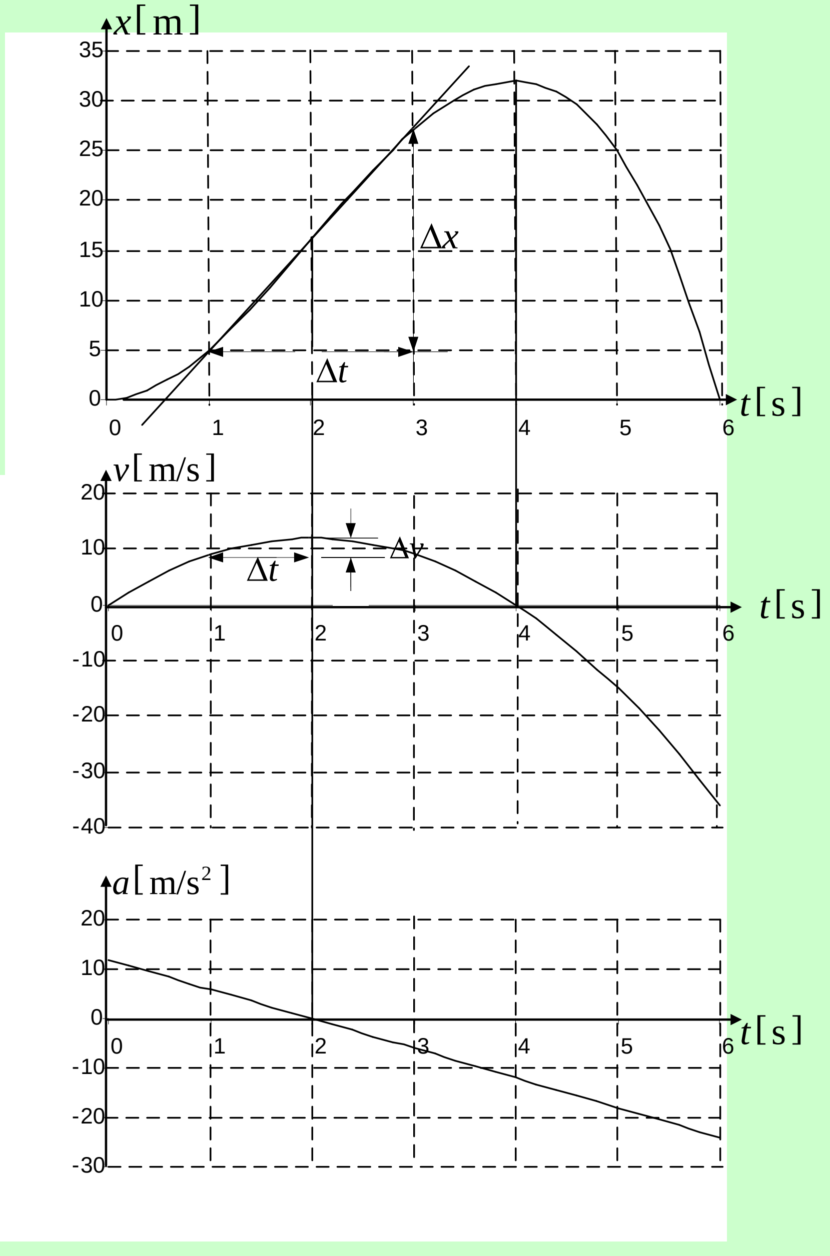
$$v_{\mathrm{max}} = v(2.0\,\mathrm{s}) = \left(12.0\,\mathrm{m/s^2}\right)\cdot(2.0\,\mathrm{s}) - \left(3.0\,\mathrm{m/s^3}\right)\cdot(2.0\,\mathrm{s})^2 = \underline{\underline{12.0\,\mathrm{m/s}}}\,.$$

La oss se nærmere på sammenhenger mellom grafene:

- I tidsrommet fra $t = 0$ til $t = 2$ er akselerasjonen positiv. Da øker farten. Vi ser også at *x*-*t*-grafen er konveks.

- Ved tidspunktet $t = 2$ er akselerasjonen lik null. Da er farten størst, og *x*-*t*-grafen har et vendepunkt.

- Når $2\,\text{s} < t \le 6\,\text{s}$, er akselerasjonen negativ. Farten avtar da, og blir etter hvert negativ. Vi ser at *x*-*t*-grafen er konkav. I første del av dette tidsrommet ($2\,\text{s} < t < 4\,\text{s}$) er farten ennå positiv, og *x* øker. Når $t = 4\,\text{s}$, er farten lik null. Da er partikkelen lengst fra startpunktet, og den snur. Når $4\,\text{s} < t \le 6\,\text{s}$, er farten negativ. Dette innebærer at partikkelen beveger seg i retning av avtakende *x*-verdier, og partikkelen er tilbake i startpunktet når $t = 6\,\text{s}$.



Oppgave: 2.1.4, 2.1.5.

2.1.5. Bevegelseslikninger når akselerasjonen er konstant.

Hittil har vi gått ut fra at vi kjenner posisjonen *x* som funksjon av tiden *t*. Deretter har vi funnet fart og akselerasjon ved derivasjon. I praksis er det mye vanligere at vi går den motsatte veien. Vi tar utgangspunkt i en kjent akselerasjon, og finner fart og posisjon. Grunnen til dette er at vi ofte kjenner de kreftene som virker på partikkelen. Ved hjelp av Newtons 2. lov (som vi snart skal komme til) finner vi akselerasjonen.

Den generelle framgangsmåten er slik:

- Du vet at sammenhengen mellom akselerasjon *a* og fart *v* er
  $$a = \frac{dv}{dt}.$$
  Dersom *a* er kjent, kan dette oppfattes som en *differensiallikning* som du kan finne farten $v(t)$ av.
- Du vet også at sammenhengen mellom fart *v* og posisjon *x* er
  $$v = \frac{dx}{dt}.$$
  Når farten $v(t)$ er kjent, kan dette oppfattes som en differensiallikning som du kan finne posisjonen $x(t)$ av.

Disse to likningene for $x(t)$ og $v(t)$ kaller vi ***bevegelseslikningene*** for partikkelen (mer presist: bevegelseslikningene for den aktuelle akselerasjonen). I prinsippet bør vi utlede nye bevegelseslikninger hvor hver eneste situasjon. Men det er i alle fall *en* situasjon som forekommer så ofte at vi utleder bevegelseslikningene en gang for alle og bruker dem hver gang vi har anledning til det: *bevegelse med konstant akselerasjon*.

Du kjenner sikkert disse likningene fra videregående skole eller forkurs. Men for sikkerhets skyld skal jeg utlede dem fra grunnen av:

Vi skal anta at ved start-tidspunktet $t = 0$ er startposisjonen $x(0) = x_0$ og startfarten $v(0) = v_0$. Vi tar utgangpunkt i definisjonen av akselerasjon, og multipliserer med *dt* på begge sider av likhetstegnet slik:
$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad dv = a \cdot dt.$$

Nå kan vi integrere på begge sider av likhetstegnet. På venstre side integrerer vi fra startfarten v_0 til en vilkårlig sluttfart *v*. På høyre side integrerer vi fra starttidspunktet $t = 0$ til et vilkårlig tidspunkt *t*. Under integrasjonene vil jeg bruke *v* og *t* både som integrasjonsvariabel og som symbol for øvre grense, selv om dette formelt sett er galt. Vi ser bort fra denne tabben, og får:
$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a \cdot dt \quad \Leftrightarrow \quad [v]_{v_0}^{v} \overset{\text{Konstant } a}{=} a \cdot [t]_0^t \quad \Leftrightarrow \quad v - v_0 = a(t - 0).$$

Litt ordning gir
$$v = v_0 + a \cdot t.$$

Så var det den andre sammenhengen:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad dx = v \cdot dt = \left(v_0 + a \cdot t\right) dt \,.$$

Jeg fusker på samme måte som før og lar *x* være både integrasjonsvariabel og symbol for sluttposisjonen. På venstre side integrerer jeg fra startposisjonen x_0 til sluttposisjonen *x*:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \left(v_0 + a \cdot t\right) dt \quad \Leftrightarrow \quad \left[x\right]_{x_0}^{x} \overset{\text{Konstant } a}{=} v_0 \cdot \left[t\right]_0^t + a \cdot \left[\tfrac{1}{2} t^2\right]_0^t \quad \Leftrightarrow \quad x - x_0 = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \,.$$

Ordning gir nå:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \,.$$

Vi summerer opp:

Dersom en partikkel beveger seg med konstant akselerasjon *a* fra en startposisjon x_0 der startfarten er v_0, vil partikkelen etter en tid *t* ha:

Posisjon	$x = x_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \,.$
Fart	$v = v_0 + a \cdot t \,.$

Disse to likningene er egentlig alt vi trenger for å handtere rettlinjet bevegelse med konstant akselerasjon. Men dersom akselerasjonen *a* eller tiden *t* ikke inngår i problemet, kan det være gunstig å eliminere *a* eller *t* fra disse likningene en gang for alle. Da får vi:

Eliminerer *a*:	$x - x_0 = \tfrac{1}{2}\left(v_0 + v\right) t \,.$
Eliminerer *t*:	$v^2 - v_0^2 = 2a\left(x - x_0\right).$

Du klarer sikkert å utlede disse likningene selv. Men for sikkerhets skyld skal jeg vise en måte å gjøre det på. Jeg starter da med å benytte at

$$v = v_0 + a \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot t = v - v_0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{a}\left(v - v_0\right) \\ a = \frac{1}{t}\left(v - v_0\right) \end{cases} .$$

Setter først uttrykket for *a* inn i formelen for *x*, og får

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{t}\left(v - v_0\right) \cdot t^2 = x_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2}\left(v - v_0\right) t = \underline{x_0 + \tfrac{1}{2}\left(v_0 + v\right) t} \,.$$

Så setter jeg uttrykket for *t* inn i uttrykket ovenfor, og trekker sammen ved hjelp av 3. kvadratsetning:

$$x = x_0 + \tfrac{1}{2}\left(v_0 + v\right) \cdot \tfrac{1}{a}\left(v - v_0\right) = \tfrac{1}{2a}\left(v^2 - v_0^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{v^2 - v_0^2 = 2a\left(x - x_0\right)} \,.$$

Advarsel: Husk at vi forutsetter at akselerasjonen *a* er konstant. Du må *ikke* bruke disse likningene dersom akselerasjonen *ikke* er konstant.

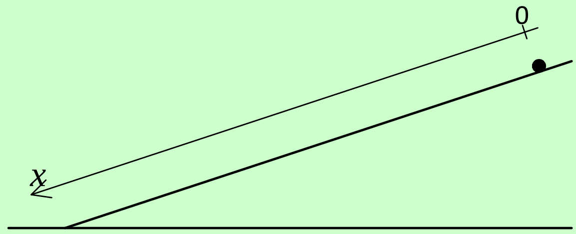
Nå er det på tide å se på et par eksempler på bevegelse med konstant akselerasjon. Men først skal jeg sette opp framgangsmåten for å løse slike problem:

1. Tegn en figur. Tegn inn en *x*-akse, velg positiv retning, og merk av nullpunktet.
2. Noter ned alle de kjente opplysningene.
3. Skriv ned bevegelseslikningene, og merk av de størrelsene som du kjenner.
4. Løs likningene.

Så går vi i gang:

Eksempel 2.1.7: En partikkel slippes fra toppen av et 0.96 meter langt skråplan. Den når bunnen av skråplanet 0.80 sekunder etter at den ble sluppet. Finn farten ved bunnen av skråplanet, og finn også akselerasjonen når du antar at akselerasjonen er konstant.

Løsning: Vi starter med å tegne en figur, der vi tegner inn en *x*-akse. I dette problemet er det naturlig å legge *x*-aksen langs skråplanet, med positiv retning nedover. Videre er det naturlig å legge nullpunktet (origo) i partikkelens startpunkt slik at $x_0 = 0\,\mathrm{m}$.



Nå setter vi opp de opplysningene vi har. At partikkelen ble *sluppet* innebærer at startfarten $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$. Ved tidspunktet $t = 0.80\,\mathrm{s}$ er posisjonen $x = 0.96\,\mathrm{m}$.

Så setter vi opp bevegelseslikningene, og merker av de størrelsene som er kjent. I oppsettet nedenfor er de kjente størrelsene rammet inn:

(1) $v = \boxed{v_0} + a\boxed{t}$

(2) $\boxed{x} = \boxed{x_0} + \boxed{v_0}\boxed{t} + \tfrac{1}{2}a\boxed{t}^2$

Vi ser at i likning (2) er alle størrelsene unntatt *a* kjent. Vi kan derfor bruke den til å finne *a*. Når *a* er funnet, kan vi bruke (1) til å finne sluttfarten *v*. Vi går i gang:

(1) $0.96\,\mathrm{m} = 0.0\,\mathrm{m} + (0.0\,\mathrm{m/s})\cdot(0.80\,\mathrm{s}) + \tfrac{1}{2}\cdot a\cdot(0.80\,\mathrm{s})^2$.

Når vi jobber med slike likninger, er det vanlig å erstatte bevegelseslikningene (som også har benevninger) med tilsvarende algebraiske likninger med tall-koeffisienter. Da får vi:

(2) $0.96 = 0 + 0\cdot 0.80 + \tfrac{1}{2}a\cdot 0.80^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0.96 = a\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 0.64 = 0.32a \quad\Leftrightarrow\quad a = \dfrac{0.96}{0.32} = \underline{3.0}$.

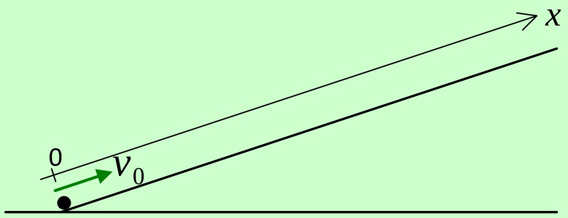
Akselerasjonen er altså $a = \underline{\underline{3.0\,\mathrm{m/s^2}}}$.

Så bruker vi (1) til å finne sluttfarten ved bunnen av skråplanet:

(1) $v(0.80\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m/s} + (3.0\,\mathrm{m/s^2})\cdot(0.80\,\mathrm{s}) = \underline{\underline{2.4\,\mathrm{m/s}}}$.

Eksempel 2.1.8: Vi fortsetter med samme partikkel og samme skråplan som i eksemplet foran, der partikkelen har en akselerasjon $3.0\,\mathrm{m/s^2}$ med retning ned langs skråplanet. Nå sender vi partikkelen *opp* langs skråplanet med en startfart $v_0 = 1.8\,\mathrm{m/s}$. Vi vil vite hvor langt opp på skråplanet partikkelen kommer, og hvor lang tid det tar før partikkelen snur.

Løsning:



Jeg velger å legge x-aksen langs skråplanet med positiv retning oppover og nullpunkt i partikkelens startpunkt. Med dette valget av positiv retning blir akselerasjonen $a = -3.0\,\text{m/s}^2$. Vi vet også at når partikkelen snur i sitt høyeste punkt på skråplanet, er farten $v = 0\,\text{m/s}$. Nå er jeg klar til å sette opp bevegelseslikningene, og merke av de kjente størrelsene:

(1) $\boxed{v} = \boxed{v_0} + \boxed{a}\,t$

(2) $x = \boxed{x_0} + \boxed{v_0}\,t + \frac{1}{2}\boxed{a}\,t^2$

Strategien blir å finne tiden t til partikkelens høyeste punkt av (1), og deretter finne strekningen x av (2).

(1) $0\,\text{m/s} = 1.8\,\text{m/s} + \left(-3.0\,\text{m/s}^2\right)\cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{1.8\,\text{m/s}}{3.0\,\text{m/s}^2} = \underline{0.60\,\text{s}}$.

Det tar altså $t = \underline{\underline{0.60\text{ s}}}$ fra partikkelen starter til den snur.

(2) $x(0.60\,\text{s}) = 0\,\text{m} + (1.8\,\text{m/s})\cdot(0.60\,\text{s}) + \frac{1}{2}\left(-3.0\,\text{m/s}^2\right)\cdot(0.60\,\text{s})^2 = \underline{0.54\,\text{m}}$.

Partikkelen kommer altså $x = \underline{\underline{0.54\text{ m}}}$ opp skråplanet før den snur.

Oppgave: 2.1.6.

2.1.6. Fritt fall.

Nøyaktige eksperimenter har vist at dersom to legemer slippes samtidig fra samme sted, vil de falle like fort dersom vi kan eliminere luftmotstanden. At de faller like fort, innebærer at de har samme akselerasjon. Denne akselerasjonen kalles ***tyngdens akselerasjon***. Størrelsen av denne akselerasjonen varierer litt fra sted til sted, men det er vanlig å si at:

Størrelsen av tyngdens akselerasjon er $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.
Tyngdens akselerasjon er alltid rettet mot jordas sentrum.

Når vi løser oppgaver med fritt fall, er det vanlig å bruke y som symbol for partikkelens posisjon. Dersom vi lar positiv y-akse peke oppover, blir tyngdens akselerasjon negativ. Lar vi positiv y-akse peke nedover, blir tyngdens akselerasjon positiv. Ellers benytter vi bevegelseslikningene for konstant akselerasjon slik eksemplet nedenfor viser.

Eksempel 2.1.9: Vi kaster et legeme rett opp med startfart $v_0 = 12.0\,\text{m/s}$.

a) Hvor lagt tid tar det før legemet er tilbake i startposisjonen?
b) Hvor høyt kommer legemet før det snur?
c) Hvor lang tid tar det før legemet er halvveis til toppen?

Løsning: Legger en *y*-akse med nullpunkt i startpunktet og positiv retning oppover. Da er $y_0 = 0$ og $a = -g$. Bevegelseslikningene blir:

(1) $v = v_0 - g \cdot t$

(2) $y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

a) Når legemet er tilbake i startposisjonen, er $y = 0$. Benytter da (2) til å sette opp en algebraisk likning med bare tall-koeffisienter:

$$0 = 12.0 \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot t^2 \quad \Leftrightarrow \quad (12.0 - 4.905t)t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \underline{0} \vee t = \frac{12.0}{4.905} = \underline{2.45}\,.$$

Den brukbare løsningen er $t = \underline{\underline{2.45\ \text{s}}}$.

b) Det er rimelig å gjette at partikkelen bruker like lang tid opp til toppen som fra toppen og ned, slik at tiden til toppen blir $\frac{1}{2} \cdot 2.45\,\text{s} = 1.23\,\text{s}$. Men vi kan beregne tiden uten å gjette. Vi benytter da at når partikkelen er i sitt høyeste punkt, er farten $v = 0\,\text{m/s}$. Likning (1) gir da

$$0\,\text{m/s} = 12.0\,\text{m/s} - \left(9.81\,\text{m/s}^2\right) \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{12.0\,\text{m/s}}{9.81\,\text{m/s}^2} = \underline{1.22\,\text{s}}\,.$$

Og dette er nettopp halvparten av tiden for hele bevegelsen opp og ned igjen.

Nå kan vi finne største høyde av (2):

$$y_{max} = (12.0\,\text{m/s}) \cdot (1.22\,\text{s}) - \tfrac{1}{2} \cdot \left(9.81\,\text{m/s}^2\right) \cdot (1.22\,\text{s})^2 = \underline{7.34\,\text{m}}\,.$$

Største høyde blir altså $y_{max} = \underline{\underline{7.34\ \text{m}}}$.

Den oppmerksomme leser vil sikkert innvende at dette kunne vi funnet enklere. Vi har jo at

$$v^2 - v_0^{\ 2} = 2a \cdot y\,.$$

Setter vi at $y = y_{max}$ når $v = 0\,\text{m/s}$, og at $a = -g$, får vi

$$y_{max} = \frac{1}{2(-g)}\left(0^2 - v_0^{\ 2}\right) = \frac{1}{-2 \cdot 9.81\,\text{m/s}^2}\left(-(12.0\,\text{m/s})^2\right) = \underline{7.34\,\text{m}}\,.$$

c) Når partikkelen er halvveis til toppen, er

$$y = \tfrac{1}{2} \cdot 7.34\ \text{m} = \underline{3.67\ \text{m}}\,.$$

Setter dette inn i (2), og lager en algebraisk likning med bare tall-koeffisienter:

$$3.67 = 12.0t - \tfrac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot t^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4.905t^2 - 12.0t + 3.67 = 0\,.$$

$$t = \frac{12.0 \pm \sqrt{12.0^2 - 4 \cdot 4.905 \cdot 3.67}}{2 \cdot 4.905} = \frac{12.0 \pm 8.485}{9.81} = \begin{cases} \underline{2.09} \\ \underline{0.358} \end{cases}$$

Dette tolker vi slik: Det tar $\underline{\underline{0.36\ \text{s}}}$ før partikkelen når halvveis opp til toppen, og $\underline{\underline{2.09\ \text{s}}}$ før den passerer samme punkt på vei ned.

Oppgave: 2.1.7.

*2.1.7. To partikler i samme koordinatsystem.

Vi kommer ofte bort i problemer der to eller flere legemer beveger seg samtidig langs samme rette linje. Da lønner det seg å velge et felles koordinatsystem for alle legemene, og sette opp bevegelseslikningene for legemene i dette koordinatsystemet. Det er viktig å være konsekvent, slik at du hele tiden holder deg til samme origo og samme valg av positiv retning. Når du setter opp bevegelseslikningene, må du vær nøye med bruk av indekser som viser hvilket legeme som hver likning gjelder for. Eksemplene nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 2.1.10: På samme måte som i eksemplene 2.1.8 og 2.1.9 har vi et 0.96 m langt skråplan der partikler kan gli opp eller ned uten friksjon. Vi antar at begge partiklene har en akselerasjon $a = 3.0\,\text{m/s}^2$ med retning nedover langs skråplanet enten partiklene beveger seg oppover eller nedover.

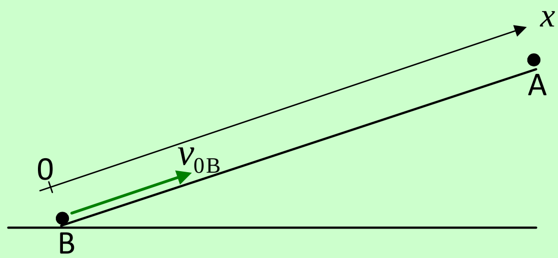
Vi slipper en partikkel A øverst på skråplanet samtidig som vi sender en partikkel B rett oppover langs skråplanet fra skråplanets fot. Partiklene kolliderer på skråplanet.

a) Hvor kolliderer partiklene når B har en startfart $1.6\,\text{m/s}$ opp langs skråplanet?

b) Hvor stor må startfarten til partikkel B være for at partiklene skal kollidere idet B snur?

c) Hva er den minste startfarten B kan ha for at partiklene skal kollidere på skråplanet?

Løsning: Det er to naturlige muligheter for valg av akse: Positiv retning oppover med origo i skråplanets fot, eller positiv retning nedover med origo på toppen av skråplanet. Jeg velger positiv retning oppover, mest fordi startfarten til B da blir positiv. Men akselerasjonen blir nå negativ: $a = -3.0\,\text{m/s}^2$. Da får jeg figuren nedenfor til venstre, og setter opp bevegelses-likningene for hver partikkel.



Partikkel A har null startfart. Men med mitt valg av origo blir startposisjonen

$$x_{0A} = 0.96\,\text{m}.$$

Da blir:

$$v_A = a \cdot t, \qquad x_A = x_{0A} + \tfrac{1}{2}at^2.$$

Partikkel B har startfart v_{0B}, men startposisjonen blir lik null. Da blir:

$$v_B = v_{0B} + a \cdot t, \qquad x_B = v_{0B}t + \tfrac{1}{2}at^2.$$

Når partiklene kolliderer, er $x_A = x_B$. Da blir

$$x_{0A} + \tfrac{1}{2}at^2 = v_{0B}t + \tfrac{1}{2}at^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_{0A} = v_{0B}t.$$

a) Når startfarten er $v_{0B} = 1.6\,\text{m/s}$, blir

$$x_{0A} = v_{0B}t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x_{0A}}{v_{0B}} = \frac{0.96\,\text{m}}{1.6\,\text{m/s}} = \underline{0.60\,\text{s}}.$$

Da er posisjonen

$$x_A = x_{0A} + \tfrac{1}{2}at^2 = 0.96\,\text{m} + \tfrac{1}{2} \cdot \left(-3.0\,\text{m/s}^2\right) \cdot \left(0.60\,\text{s}\right)^2 = \underline{\underline{0.42\,\text{m}}}.$$

Du får selvsagt samme svar dersom du bruker uttrykket for x_B.

b) Idet B snur, er

$$v_B = 0\,\text{m/s} \quad \Leftrightarrow \quad v_{0B} + a \cdot t = 0\,\text{m/s} \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{v_{0B}}{a}.$$

Vet allerede at partiklene kolliderer når

$$x_{0\mathrm{A}} = v_{0\mathrm{B}}t = v_{0\mathrm{B}} \cdot \left(-\frac{v_{0\mathrm{B}}}{a}\right) \quad \Leftrightarrow \quad v_{0\mathrm{B}} = \sqrt{-a \cdot x_{0\mathrm{A}}} = \sqrt{-\left(-3.0\,\mathrm{m/s^2}\right)\left(0.96\,\mathrm{m}\right)} = \underline{\underline{1.7\,\mathrm{m/s}}}\,.$$

c) For at partiklene skal kollidere på skråplanet, må kollisjonen inntreffe mens $x_\mathrm{B} > 0\,\mathrm{m}$. Setter opp dette som en ulikhet, der jeg benytter at

$$x_{0\mathrm{A}} = v_{0\mathrm{B}}t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x_{0\mathrm{A}}}{v_{0\mathrm{B}}}:$$

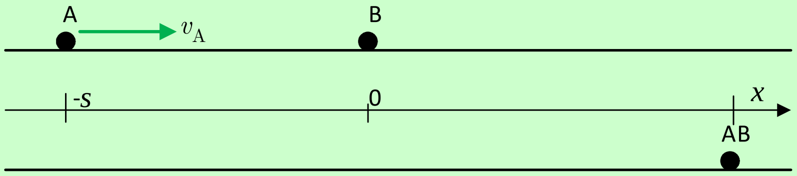
$$x_\mathrm{B} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_{0\mathrm{B}}t + \tfrac{1}{2}at^2 > 0 \quad \underset{\text{fordi } t>0}{\Leftrightarrow} \quad v_{0\mathrm{B}} + \tfrac{1}{2}at > 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_{0\mathrm{B}} + \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{x_{0\mathrm{A}}}{v_{0\mathrm{B}}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad {v_{0\mathrm{B}}}^2 > -\tfrac{1}{2}a \cdot x_{0\mathrm{A}} = -\tfrac{1}{2} \cdot \left(-3\,\mathrm{m/s^2}\right) \cdot \left(0.96\,\mathrm{m}\right) = 1.44\,\mathrm{m^2/s^2} \quad \Leftrightarrow \quad v_{0\mathrm{B}} > \underline{\underline{1.2\,\mathrm{m/s}}}$$

Vi tar et eksempel til mens vi er i gang:

Eksempel 2.1.11: Som vanlig er Anne sent ute for å nå bussen. Idet bussen kjører ut fra holdeplassen, er Anne en strekning *s* bak bussen. Vi antar at Anne løper med konstant fart $v_\mathrm{A} = 6.0\,\mathrm{m/s}$, mens bussen (som starter i ro) har en konstant akselerasjon $a_\mathrm{B} = 2.0\,\mathrm{m/s^2}$. Anne løper i samme retning som bussen kjører. Hva er den største avstanden *s* Anne kan være bak bussen dersom hun skal klare å ta den igjen?

Løsning: Lager først en figur der både Anne og bussen oppfattes som partikler:



Jeg legger inn et koordinatsystem med origo der bussen starter, og setter opp bevegelses-likningene. Merk at Anne starter i posisjon $-s$.

Anne: $x_\mathrm{A} = -s + v_\mathrm{A}t$, $\quad v_\mathrm{A} = 6.0\,\mathrm{m/s}$.

Bussen: $x_\mathrm{B} = \tfrac{1}{2}a_\mathrm{B}t^2$, $\quad v_\mathrm{B} = a_\mathrm{B}t$.

Her er *t* tiden som er gått siden bussen kjørte ut fra holdeplassen.
Vi skal løse problemet med to forskjellige resonnement:

1) I det øyeblikket Anne tar igjen bussen, er

$$x_\mathrm{A} = x_\mathrm{B} \quad \Leftrightarrow \quad -s + v_\mathrm{A}t = \tfrac{1}{2}a_\mathrm{B}t^2\,.$$

Dette er en andregradslikning i *t*. Ordner og løser den, og får:

$$\tfrac{1}{2}a_\mathrm{B}t^2 - v_\mathrm{A}t + s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{v_\mathrm{A} \pm \sqrt{{v_\mathrm{A}}^2 - 4\left(\tfrac{1}{2}a_\mathrm{B} \cdot s\right)}}{2 \cdot \tfrac{1}{2}a_\mathrm{B}} = \frac{v_\mathrm{A} \pm \sqrt{{v_\mathrm{A}}^2 - 2a_\mathrm{B} \cdot s}}{a_\mathrm{B}}\,.$$

For at denne likningen skal ha noen løsning, må

$${v_\mathrm{A}}^2 - 2a_\mathrm{B} \cdot s \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \leq \frac{{v_\mathrm{A}}^2}{2a_\mathrm{B}} = \frac{\left(6.0\,\mathrm{m/s}\right)^2}{2 \cdot 2.0\,\mathrm{m/s^2}} = \underline{\underline{9.0\,\mathrm{m}}}\,.$$

Dersom $s < 9\,\mathrm{m}$, får likningen to løsninger. Den minste *t*-verdien er det tidspunktet da Anne når igjen bussen. Men så forutsetter likningene at både Anne og bussen fortsetter som før. Den største *t*-verdien er da det tidspunktet der bussen kjører forbi Anne igjen.

2) Vi kan også resonnere slik: Dersom Anne så vidt skal nå igjen bussen, vil bussen ha fått samme fart som Anne idet Anne når den igjen. Da er

$$v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{A}} \quad \Leftrightarrow \quad a_{\mathrm{B}} t = v_{\mathrm{A}} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{v_{\mathrm{A}}}{a_{\mathrm{B}}} = \frac{6.0\,\mathrm{m/s}}{2.0\,\mathrm{m/s^2}} = \underline{3.0\,\mathrm{s}}\,.$$

Ved dette tidspunktet er

$$x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}} \quad \Leftrightarrow \quad -s + v_{\mathrm{A}} t = \tfrac{1}{2} a_{\mathrm{B}} t^2$$

$$\Leftrightarrow \quad s = v_{\mathrm{A}} t - \tfrac{1}{2} a_{\mathrm{B}} t^2 = \left(6.0\,\mathrm{m/s}\right)\cdot\left(3.0\,\mathrm{s}\right) - \tfrac{1}{2}\left(2.0\,\mathrm{m/s^2}\right)\cdot\left(3.0\,\mathrm{s}\right)^2 = \underline{\underline{9.0\,\mathrm{m}}}$$

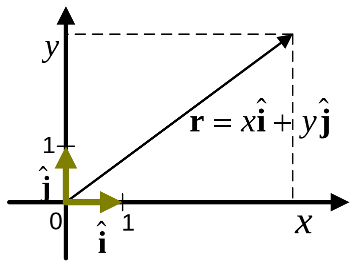
Oppgaver: 2.1.8, 2.1.9, 2.1.10.

2.2. Bevegelse i rommet.

2.2.1. Posisjon, hastighet og akselerasjon.

Hittil har vi bare sett på *rettlinjet* bevegelse. Nå er det på tide å løsrive seg fra den rette linja, og gå ut i rommet. Vi skal sette opp likninger for bevegelse i et tredimensjonalt koordinatsystem, men skal stort sett benytte dem på *plan* bevegelse (d.v.s. bevegelse i et todimensjonalt koordinatsystem).

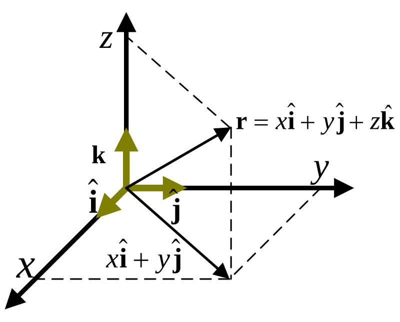
Posisjonen til en partikkel angis med en vektor **r** i et koordinatsystem som ligger fast i rommet. Under behandlingen av Newtons lover skal vi se nærmere på hva vi mener med at koordinatsystemet ligger "fast i rommet". Siden posisjonen varierer med tiden, bør vi skrive $\mathbf{r}(t)$, men som regel skriver vi bare **r** og lar det være underforstått at **r** er en funksjon av *t*.



Når partikkelen beveger seg i et plan, er posisjonen gitt ved en *x*- og en *y*-koordinat. Vi innfører nå en enhetsvektor $\hat{\mathbf{i}}$ som peker langs *x*-aksen, og en enhetsvektor $\hat{\mathbf{j}}$ som peker langs *y*-aksen. Da kan partikkelens posisjon gis ved vektoren

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

slik figuren til venstre viser.



I et 3-dimensjonalt rom lar vi *xy*-planet være ”gulv” mens vi føyer til en *z*-akse som angir høyden over ”gulvet” slik figuren til venstre viser. Der er det også føyd til en ny enhetsvektor $\hat{\mathbf{k}}$ som peker langs *z*-aksen. Da kan partikkelens posisjon gis ved vektoren

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

slik figuren til venstre viser.

Den skrivemåten for vektorer som vi har brukt hittil, er nok den mest korrekte ved at enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$ og $\hat{\mathbf{j}}$ (og $\hat{\mathbf{k}}$) angir retningene til komponentene, mens x og y (og z) angir hvor lange hver komponent er. I praksis brukes ofte enklere skrivemåter som vist nedenfor:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

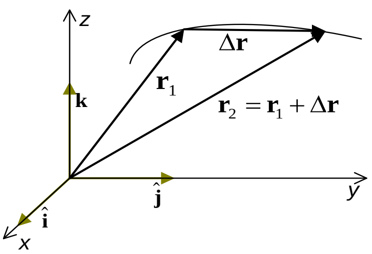
Når vi bruker de to siste skrivemåtene, er enhetsvektorene og deres retninger underforstått. Den midterste formen kalles en *radvektor*, mens den siste kalles en *kolonnevektor*. Bruk den formen som du liker best.

Ved rettlinjet bevegelse definerte vi *fart* som posisjonsendring pr tidsenhet, eller mer presist som den deriverte av posisjonen. Ved bevegelse i planet eller i rommet skal vi på tilsvarende måte definere *hastighet* som endring av posisjons*vektor* pr tidsenhet, eller mer presist ved å derivere posisjonsvektoren.

Anta at partikkelens posisjon ved tidspunktet t_1 er gitt ved vektoren $\mathbf{r}_1$, og at posisjonen ved et litt senere tidspunkt $t_2 = t_1 + \Delta t$ er gitt ved vektoren $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}$ slik figuren nedenfor viser. Vi definerer nå partikkelens ***hastighet*** slik:

Dersom $\Delta\mathbf{r}$ er posisjonsendringen til en partikkel i løpet av tidsintervallet Δt, er partikkelens hastighet

$$\mathbf{v} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$



Vi får altså partikkelens hastighet ved å derivere uttrykket for posisjonsvektor med hensyn på t.

Av figuren ser du at $\Delta\mathbf{r}$ er nær tangent til partikkelens bane. Når $\Delta t \to 0$, vil $\mathbf{r}_2$ nærme seg $\mathbf{r}_1$. Da vil $\Delta\mathbf{r}$ komme stadig nærmere tangenten til banen, slik at:

Hastighetsvektoren $\mathbf{v}$ har alltid retning langs tangenten til partikkelens bane.

Når vi deriverer en vektor, må vi huske på at enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$ og $\hat{\mathbf{j}}$ (og $\hat{\mathbf{k}}$) har konstant lengde og ligger fast i rommet. De kan derfor betraktes som konstanter under derivasjonen. Da får vi:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\right) = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix}.$$

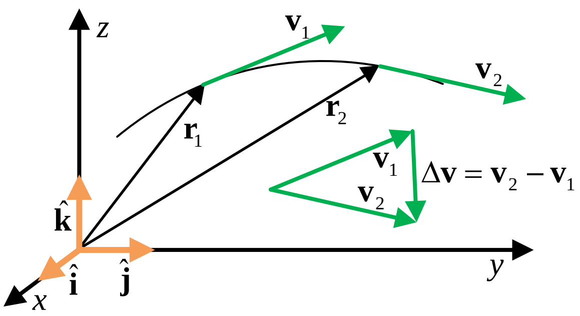
Vi deriverer altså en vektor ved å derivere *komponentene* forutsatt at vektoren er uttrykt ved faste enhetsvektorer.

Hastigheten **v** er en *vektor*, og har således både en størrelse og en retning. Dersom vi bare er interessert i *størrelsen* av hastigheten uten å bry oss om retningen, angir vi dette ved å skrive $|\mathbf{v}|$ (absoluttverdien av **v**). Merk at $|\mathbf{v}|$ aldri kan bli negativ. Dersom det ikke kan føre til misforståelser, kan vi også skrive bare *v* istedenfor $|\mathbf{v}|$. Vi sier at *v* er *farten* til partikkelen.

Ved rettlinjet bevegelse definerte vi *akselerasjon* som den deriverte av farten. Ved bevegelse i planet eller i rommet skal vi definere akselerasjon som den deriverte av hastighetsvektoren:

Dersom en partikkel har hastighet $\mathbf{v}_1$ ved tidspunktet t_1 og hastighet $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \Delta\mathbf{v}$ ved et litt senere tidspunkt $t_2 = t_1 + \Delta t$, er partikkelens ***akselerasjon***

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$



Situasjonen er illustrert på figuren til venstre. Merk at hastighetsvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er tangenter til banen.

De to hastighetsvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ samt endringen $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ er tegnet inn for seg på en liten figur.

Legg merke til at akselerasjonsvektoren **a** må ha samme retning som $\Delta\mathbf{v}$. Vi ser av figuren at selv om $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er like lange (d.v.s. at *farten* ikke endres) kan vi likevel ha en akselerasjon fordi hastigheten endrer *retning*. Dette er en språkbruk som strider mot vanlig dagligtale. Vi skal se nærmere på dette i kap. 2 2.5.

Eksempel 2.2.1:
Posisjonen til en partikkel er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \frac{1}{6}t(t-6)^2 \end{bmatrix}, \qquad 0 \le t \le 6.$$

a) Tegn en skisse av partikkelens bane, gjerne ved hjelp av et dataverktøy.

b) Finn partikkelens hastighet $\mathbf{v}(t)$ og partikkelens akselerasjon $\mathbf{a}(t)$. Hva forteller *x*-komponentene av $\mathbf{v}(t)$ og $\mathbf{a}(t)$ deg?

c) Beregn og tegn inn $\mathbf{v}(1)$ og $\mathbf{v}(5)$, og $\mathbf{a}(1)$ og $\mathbf{a}(5)$.

Løsning:

Beregner x- og y-verdier for $t=0$, $t=0.2$, $t=0.4$, …, $t=6$. Grafen er tegnet til venstre.

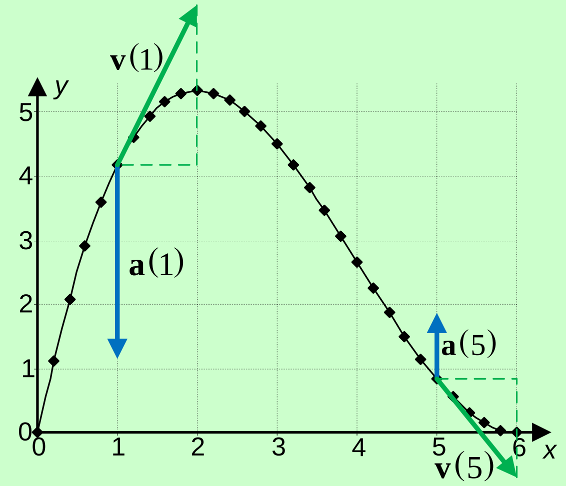
$$\mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}(t-2)(t-6)\end{bmatrix}}}.$$

$$\mathbf{a}(t)=\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}0\\ t-4\end{bmatrix}}}.$$

Jeg har derivert $y(t)$ ved å oppfatte uttrykket som et produkt av $\frac{1}{6}t$ og $(t-6)^2$, og deretter brukt kjerneregelen. Da blir $\frac{1}{6}(t-6)$ en felles faktor som settes utenfor parentes:

$$\tfrac{dy}{dt}=\left(\tfrac{1}{6}\cdot 1\right)\cdot(t-6)^2+\left(\tfrac{1}{6}t\right)\cdot\left(2(t-6)\cdot 1\right)=\tfrac{1}{6}(t-6)\left((t-6)+2t\right)$$
$$=\tfrac{1}{6}(t-6)(3t-6)=\underline{\tfrac{1}{2}(t-6)(t-2)}$$

Av uttrykket for $\mathbf{v}(t)$ ser vi at fartskomponenten i x-retning er konstant lik 1. Da må akselerasjonen i x-retning være lik 0, noe vi også ser av uttrykket for $\mathbf{a}(t)$.



Setter inn $t=1$ og $t=5$, og får:

$$\mathbf{v}(1)=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}(1-2)(1-6)\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}1\\ \frac{5}{2}\end{bmatrix}}}$$

$$\mathbf{v}(5)=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}(5-2)(5-6)\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}1\\ -\frac{3}{2}\end{bmatrix}}}$$

$$\mathbf{a}(1)=\begin{bmatrix}0\\ 1-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}(5)=\begin{bmatrix}0\\ 5-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

Hastighets- og akselerasjons-vektorene er tegnet inn i diagrammet ovenfor. Vi ser at hastighetsvektorene er tangenter til grafen.

Oppgave: 2.2.1.

2.2.2. Bevegelseslikninger.

Vi har nå definert posisjon **r**, hastighet **v** og akselerasjon **a** for en tredimensjonal bevegelse slik at

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt},\qquad \mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Disse to sammenhengene kan nå oppfattes som differensiallikninger på vektorform. Generelt kan slike system av differensiallikninger være vanskelige å løse. Men vi har ett viktig spesialtilfelle som er lett å handtere: Konstant akselerasjon. Da får vi vektor-likninger som minner sterkt om de tilsvarende likningene for rettlinjet bevegelse:

> Dersom akselerasjonen **a** er konstant (*og kun da*) er sammenhengen mellom posisjon **r**, hastighet **v** og akselerasjon **a** gitt ved
>
> $$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$
>
> $$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$
>
> der $\mathbf{r}_0$ og $\mathbf{v}_0$ er startposisjon og starthastighet.

Utledningen følger samme framgangsmåte som for rettlinjet bevegelse. Vi tar utgangspunkt i definisjonen av akselerasjon:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Dette er egentlig 3 differensiallikninger, en for *x*-retningen, en for *y*-retningen og en for *z*-retningen. Men vi kan slå alle tre sammen til en vektor som ovenfor. Dersom akselerasjonen er konstant, kan vi nå integrere de tre retningene hver for seg og slå sammen resultatet til en ny vektor. Men vi kan også gjøre det enklere, og benytte vektor-notasjon slik det er gjort nedenfor:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad d\mathbf{v} = \mathbf{a}dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a}dt$$

$$\Leftrightarrow \quad [\mathbf{v}]_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} = \mathbf{a}[t]_0^t \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}t \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

Som før har jeg slurvet og brukt samme symbol både for integrasjonsvariabel og for integrasjonsgrense. Vi overser den tabben, og går løs på den neste sammenhengen på samme måte:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt = (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t)dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_0^t (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t)dt$$

$$\Leftrightarrow \quad [\mathbf{r}]_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} = \left[\mathbf{v}_0 t + \mathbf{a}\cdot\tfrac{1}{2}t^2\right]_0^t \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

Tilsynelatende er dette bare to likninger. Men for en 3-dimensjonal bevegelse inneholder hver av vektorlikningene 3 komponent-likninger, slik at hele sette består av 6 likninger. Det sier seg selv at slike likningssystem kan bli brysomme å løse. Vi skal derfor begrense oss til ett spesialtilfelle, *prosjektilbevegelse*.

2.2.3. Prosjektilbevegelse.

Vi har tidligere sett at når et legeme slippes nær jordoverflaten og luftmotstanden ikke spiller noen rolle, vil legemet få en konstant akselerasjon som vi kaller ***tyngdens akselerasjon***. Denne akselerasjonen har størrelse $g \approx 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ og retning inn mot jordas sentrum.

Når vi studerer *prosjektilbevegelse* (d.v.s. bevegelsen til partikler som kastes nær jordoverflaten) er det vanlig å benytte et koordinatsystem med *x*-akse i horisontalplanet og *y*-akse rett oppover. I et slikt koordinatsystem blir tyngdens akselerasjon

$$\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{j}}$$

der $\hat{\mathbf{j}}$ er en enhetsvektor med retning rett *oppover* (langs positiv *y*-akse). Da blir akselerasjonen:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}.$$

Vi kan nå sette opp bevegelseslikningene for slik prosjektilbevegelse. Vi skal bruke indeks $_0$ til å angi start-tilstand (d.v.s. tilstand når $t = 0$). Da får vi:

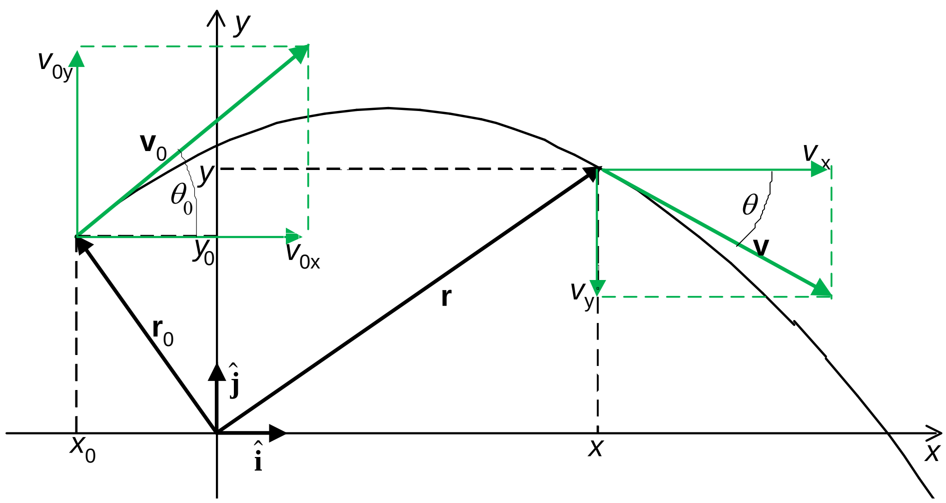
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - gt \end{bmatrix}.$$

Her er v_x og v_y komponentene til hastighetsvektoren **v**, mens v_{0x} og v_{0y} er komponentene til starthastigheten $\mathbf{v}_0$. Merk at hastighetskomponenten v_x i *x*-retning er konstant.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{bmatrix} t + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} t^2 = \begin{bmatrix} x_0 + v_{0x}t \\ y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan si at en slik prosjektilbevegelse er sammensatt av en bevegelse med konstant fart i *x*-retning, og en bevegelse med konstant akselerasjon *g* med retning nedover i *y*-retning.

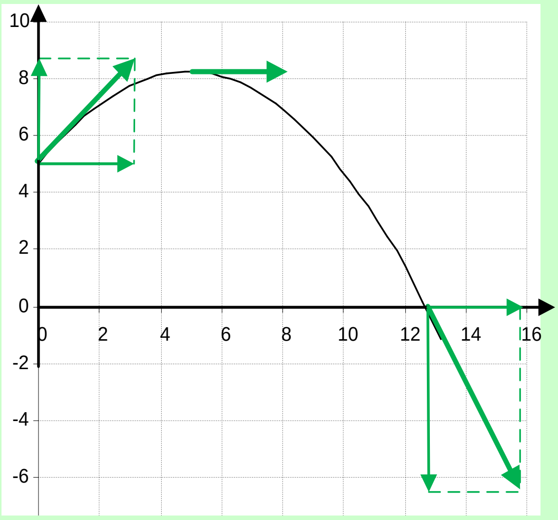
På figuren nedenfor ser du prosjektilbanen med startposisjonen $\mathbf{r}_0$ og starthastigheten $\mathbf{v}_0$ inntegnet. I en vilkårlig posisjon **r** er hastigheten **v.** Alle vektorene er dekomponert.



Eksempel 2.2.2:
Lille Petter kaster de nye klinkekulene som han fikk til jul ut vinduet. En av dem kastes med utgangsfart $v_0 = 10\,\text{m/s}$ skrått oppover med en vinkel på 53.1° med horisontalplanet. Kula starter 5.0 m over bakken. Se bort fra luftmotstand, og finn:

a) Kulas største høyde over bakken.
b) Kastevidden, d.v.s. den horisontale avstanden fra husveggen til det punktet der kula treffer bakken når vi forutsetter at bakken er horisontal.
c) Kulas fart og retning idet den treffer bakken.

Løsning: Vi starter med å lage en figur. Deretter plasserer vi koordinatsystemet inn i figuren. Det er naturlig å la y-aksen følge husveggen. Vi kan legge x-aksen enten langs bakken eller i høyde med vinduet. Slik spørsmålene er stilt, virker det mest naturlig å legge x-aksen langs bakken. Vi får da figuren nedenfor:



Slik vi har lagt koordinatsystemet, er startposisjonen

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0\,\text{m} \\ 5.0\,\text{m} \end{bmatrix}$$

og starthastigheten

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \cos\theta_0 \\ v_0 \sin\theta_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (10\,\text{m/s})\cos 53.1^\circ \\ (10\,\text{m/s})\sin 53.1^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0\,\text{m/s} \\ 8.0\,\text{m/s} \end{bmatrix}$$

Ved et vilkårlig tidspunkt t er da posisjonen

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + v_{0x}t \\ y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (6.0\,\text{m/s}) \cdot t \\ 5.0\,\text{m} + (8.0\,\text{m/s}) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}$$

og hastigheten

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - gt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0\,\text{m/s} \\ 8.0\,\text{m/s} - gt \end{bmatrix}.$$

Jeg venter med å sette inn tallverdi for g.

a) Når kula er i sitt høyeste punkt, er hastighetsvektoren horisontal. Da er

$$v_y = 0\,\text{m} \quad \Leftrightarrow \quad 8.0\,\text{m/s} - gt = 0\,\text{m/s} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{8.0\,\text{m/s}}{g} = \frac{8.0\,\text{m/s}}{9.81\,\text{m/s}^2} = \underline{0.82\,\text{s}}.$$

Høyden over bakken ved dette tidspunktet er

$$y = 5.0\,\text{m} + (8.0\,\text{m/s}) \cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$= 5.0\,\text{m} + (8.0\,\text{m/s}) \cdot (0.82\,\text{s}) - \tfrac{1}{2} \cdot (9.81\,\text{m/s}^2) \cdot (0.82\,\text{s})^2 = \underline{\underline{8.26\,\text{m}}}$$

b) Idet kula treffer bakken, er

$$y = 0\,\text{m} \quad \Leftrightarrow \quad 5.0\,\text{m} + (8.0\,\text{m/s})t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0\,\text{m}.$$

$$t = \frac{-8.0\,\text{m/s} \pm \sqrt{(8.0\,\text{m/s})^2 - 4(-\frac{1}{2}g)5.0\,\text{m}}}{2(-\frac{1}{2}g)} = \frac{-8\,\text{m/s} \pm \sqrt{64 + 98.1}\,\text{m/s}}{-9.81\,\text{m/s}^2} = \begin{cases} -0.48\,\text{s} \\ 2.11\,\text{s} \end{cases}$$

Den brukbare verdien er $t = 2.11\,\text{s}$. Da er kastvidden

$$x = 6.0t = 6.0\,\text{m/s} \cdot 2.11\,\text{s} = \underline{\underline{12.66\,\text{m}}}.$$

c) Vi vet allerede at kula treffer bakken når $t = 2.11\,\text{s}$. Da er hastigheten

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0\,\text{m/s} \\ 8.0\,\text{m/s} - gt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0\,\text{m/s} \\ 8.0\,\text{m/s} - \left(9.81\,\text{m/s}^2\right)\cdot\left(2.11\,\text{s}\right) \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 6.0\,\text{m/s} \\ -12.7\,\text{m/s} \end{bmatrix}}.$$

Størrelsen av farten er

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{\left(6.0\,\text{m/s}\right)^2 + \left(-12.7\,\text{m/s}\right)^2} = \underline{\underline{14.0\,\text{m/s}}}.$$

Vinkelen med bakken er gitt ved

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-12.7\,\text{m/s}}{6.0\,\text{m/s}} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \underline{\underline{-64.7^\circ}}.$$

Noen ganger kan slike problem også løses ved hjelp av energibetraktninger. Vi skal komme tilbake til dette senere.

`Oppgave:` 2.2.2.

*2.2.4. Mer om bevegelse i planet og i rommet.

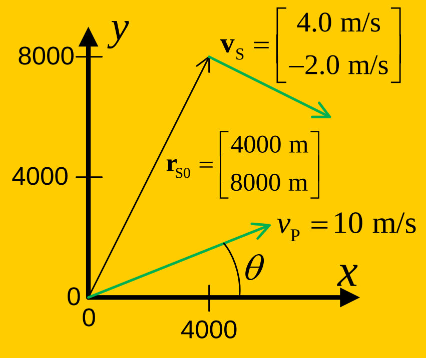
Når to eller flere legemer beveger seg samtidig, vil de kollidere dersom de har samme posisjonsvektor ved samme tidspunkt. Vi skal se et par eksempler på dette nedenfor.

Vi starter med å legge merke til at:

Dersom hastigheten er konstant lik $\mathbf{v}_0$, blir posisjonen

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot t$$

Eksempel 2.2.3:



En kystvaktstasjon oppdager et fartøy som de mistenker for å drive smugling. De vil derfor sende ut en patruljebåt for å avskjære fartøyet. Idet patruljebåten starter, befinner fartøyet seg i posisjon

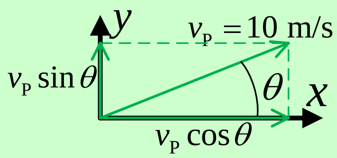
$$\mathbf{r}_{S0} = \begin{bmatrix} 4000\text{ m} \\ 8000\text{ m} \end{bmatrix}$$

i forhold til kystvaktstasjonen, og holder en hastighet

$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} 4.0\text{ m/s} \\ -2.0\text{ m/s} \end{bmatrix}.$$

Patruljebåten holder konstant fart $v_P = 10\text{ m/s}$. Beregn hvilken kurs patruljebåten må ha (d.v.s. finn vinkelen θ) for at patruljebåten raskest mulig skal treffe smuglerfartøyet, og beregn hvor og når båtene møtes. Vi forutsetter at smuglerfartøyet holder konstant hastighet.

Løsning:



Hastigheten til patruljebåten blir

$$\mathbf{v}_\mathrm{P} = \begin{bmatrix} v_\mathrm{P}\cos\theta \\ v_\mathrm{P}\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\ \mathrm{m/s}\cdot\cos\theta \\ 10\ \mathrm{m/s}\cdot\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Ved tidspunktet *t* har patruljebåten posisjon

$$\mathbf{r}_\mathrm{P} = \mathbf{v}_\mathrm{P}t = \begin{bmatrix} 10\ \mathrm{m/s}\cdot\cos\theta\cdot t \\ 10\ \mathrm{m/s}\cdot\sin\theta\cdot t \end{bmatrix}$$

mens smuglerfartøyets posisjon er

$$\mathbf{r}_\mathrm{S} = \mathbf{r}_\mathrm{S0} + \mathbf{v}_\mathrm{S}t = \begin{bmatrix} 4000\ \mathrm{m} \\ 8000\ \mathrm{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.0\ \mathrm{m/s}\cdot t \\ -2.0\ \mathrm{m/s}\cdot t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000\ \mathrm{m} + 4.0\ \mathrm{m/s}\cdot t \\ 8000\ \mathrm{m} - 2.0\ \mathrm{m/s}\cdot t \end{bmatrix}.$$

For at båtene skal kunne møtes, må

$$\mathbf{r}_\mathrm{P} = \mathbf{r}_\mathrm{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 10\ \mathrm{m/s}\cdot\cos\theta\cdot t \\ 10\ \mathrm{m/s}\cdot\sin\theta\cdot t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000\ \mathrm{m} + 4.0\ \mathrm{m/s}\cdot t \\ 8000\ \mathrm{m} - 2.0\ \mathrm{m/s}\cdot t \end{bmatrix}.$$

Dette gir to likninger som vi kan finne θ og *t* av. For enkelhets skyld sløyfer jeg benevningene når jeg setter opp disse likningene:

$$\begin{matrix} 10\cos\theta\cdot t = 4000 + 4t \\ 10\sin\theta\cdot t = 8000 - 2t \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \cos\theta\cdot t = 400 + 0.4t \\ \sin\theta\cdot t = 800 - 0.2t \end{matrix}$$

Kvadrerer begge likningene før jeg legger dem sammen:

$$\cos^2\theta\cdot t^2 + \sin^2\theta\cdot t^2 = (400 + 0.4t)^2 + (800 - 0.2t)^2$$

$$(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\cdot t^2 = 16\cdot 10^4 + 320t + 0.16t^2 + 64\cdot 10^4 - 320t + 0.04t^2$$

$$1\cdot t^2 = 0.20t^2 + 80\cdot 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad 0.80t^2 = 80\cdot 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 100\cdot 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad t = \underline{\underline{1000}}$$

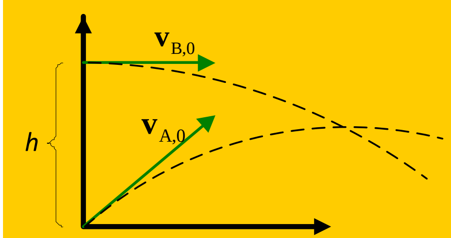
Da blir

$$\begin{matrix} \cos\theta\cdot 1000 = 400 + 0.4\cdot 1000 \\ \sin\theta\cdot 1000 = 800 - 0.2\cdot 1000 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \cos\theta = 0.800 \\ \sin\theta = 0.600 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \underline{\underline{36.9^\circ}}.$$

Posisjonen finnes for eksempel av posisjonsvektoren for patruljebåten:

$$\mathbf{r}_\mathrm{P} = \mathbf{v}_\mathrm{P}t = \begin{bmatrix} 10\ \mathrm{m/s}\cdot\cos\theta\cdot t \\ 10\ \mathrm{m/s}\cdot\sin\theta\cdot t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\ \mathrm{m/s}\cdot 0.800\cdot 1000\ \mathrm{s} \\ 10\ \mathrm{m/s}\cdot 0.600\cdot 1000\ \mathrm{s} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 8000\ \mathrm{m} \\ 6000\ \mathrm{m} \end{bmatrix}}}.$$

Eksempel 2.2.4:



To små kuler A og B kastes ut *samtidig*. Kule A kastes ut med startfart $v_{\mathrm{A},0} = 5.0\,\mathrm{m/s}$ og med retning 36.9° over horisontalplanet. Kule B starter en høyde *h* rett over kule A, og kastes horisontal ut med startfart $v_{\mathrm{B},0} = 4.0\,\mathrm{m/s}$. Sett tyngdens akselerasjon $g = 9.8\,\mathrm{m/s}^2$, og se bort fra luftmotstand. Anta at bevegelsen foregår i et plan.

a) Vis at kulene kolliderer i lufta.

b) Bestem *h* slik at kulene kolliderer når kule A er i sitt høyeste punkt.

Løsning:

a) Får bruk for at $\cos 36.9° = \frac{4}{5}$ og $\sin 36.9° = \frac{3}{5}$. Ser også bort fra benevninger. Da blir:

$$\mathbf{r}_\mathrm{A} = \begin{bmatrix} x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{A} \end{bmatrix} = \mathbf{r}_{\mathrm{A},0} + \mathbf{v}_{\mathrm{A},0} t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{\mathrm{A},0}\cos 36.9° \\ v_{\mathrm{A},0}\sin 36.9° \end{bmatrix} t + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} t^2$$

$$= \begin{bmatrix} 5.0\cdot\frac{4}{5}t \\ 5.0\cdot\frac{3}{5}t - \frac{1}{2}\cdot 9.8t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0t \\ 3.0t - 4.9t^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_\mathrm{B} = \begin{bmatrix} x_\mathrm{B} \\ y_\mathrm{B} \end{bmatrix} = \mathbf{r}_{\mathrm{B},0} + \mathbf{v}_{\mathrm{B},0} t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{\mathrm{B},0} \\ 0 \end{bmatrix} t + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} t^2 = \begin{bmatrix} 4.0t \\ h - 4.9t^2 \end{bmatrix}.$$

Dersom kulene skal kollidere, må det være et tidspunkt t der

$$\mathbf{r}_\mathrm{A} = \mathbf{r}_\mathrm{B} \quad \Leftrightarrow \quad x_\mathrm{A} = x_\mathrm{B} \quad \wedge \quad y_\mathrm{A} = y_\mathrm{B}.$$

Vi ser at x_A alltid er lik x_B. For å få $y_\mathrm{A} = y_\mathrm{B}$, må vi ha at

$$3.0t - 4.9t^2 = h - 4.9t^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3.0t = h \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{h}{3.0\,\mathrm{m/s}}.$$

Så lenge $h > 0$ har denne likningen alltid en positiv verdi av t som løsning. Altså må de to kulene kollidere.

b) Får nå bruk for at

$$\mathbf{v}_\mathrm{A} = \begin{bmatrix} v_{\mathrm{A},x} \\ v_{\mathrm{A},y} \end{bmatrix} = \mathbf{v}_{\mathrm{A},0} + \mathbf{a}t = \begin{bmatrix} v_{\mathrm{A},0}\cos 36.9° \\ v_{\mathrm{A},0}\sin 36.9° \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 5.0\cdot\frac{4}{5} \\ 5.0\cdot\frac{3}{5} - 9.8t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0 \\ 3.0 - 9.8t \end{bmatrix}.$$

Kule A er i sitt høyeste punkt når

$$v_{\mathrm{A},y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3.0 - 9.8t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{3.0\,\mathrm{m/s}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}} = \underline{0.306\,\mathrm{s}}.$$

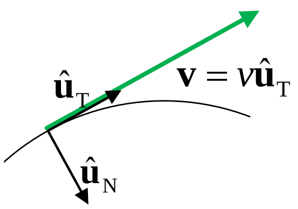
Vi har allerede vist at kulene kolliderer når

$$t = \frac{h}{3.0\,\mathrm{m/s}} \quad \Leftrightarrow \quad h = 3.0\,\mathrm{m/s}\cdot 0.306\,\mathrm{s} = \underline{\underline{0.92\,\mathrm{m}}}.$$

`Oppgaver:` `2.2.3`.

2.2.5. Akselerasjon ved krumlinjet bevegelse. Sirkelbevegelse.

Vi har tidligere nevnt at siden *hastighet* er en vektor, kan vi få akselerasjon både når denne vektoren endrer *størrelse* og når den endrer *retning*. Vi skal nå se nærmere på dette.



Vi innfører en enhetsvektor $\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{T}$ som tangent til banen i fartsretningen, og en annen enhetsvektor $\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{N}$ som står normalt på banen og peker ”innover”, d.v.s. mot banens konkave side. Siden hastighetsvektoren alltid er tangent til banen, kan vi skrive

$$\mathbf{v} = v\cdot\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{T}$$

der $v = |\mathbf{v}|$ er *farten* til partikkelen.

Vi finner partikkelens akselerasjon ved å derivere hastighetsvektoren **v**. Dette er gjort i kap. 2.3.1. Resultatet er:

Akselerasjonen **a** kan alltid skrives på formen

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{\mathbf{u}}_\mathrm{T} + \frac{v^2}{R} \cdot \hat{\mathbf{u}}_\mathrm{N}$$

der v er partikkelens fart mens R er radien i den sirkelen som banen kan tenkes å være en del av nær partikkelens posisjon.

Akselerasjonen kan altså dekomponeres slik:

- En ***baneakselerasjon*** med størrelse $a_\mathrm{T} = \frac{dv}{dt}$ og retning langs hastighetsvektoren.
- En ***sentripetalakselerasjon*** med størrelse $a_\mathrm{N} = \frac{v^2}{R}$ og retning mot banens *krumnings-senter*.

Sirkelbevegelse med konstant fart er et spesialtilfelle av krumlinjet bevegelse. Dersom en partikkel bruker en tid T på en hel omdreining av en sirkel med radius R, er den konstante farten

$$v = \frac{2\pi R}{T}.$$

Da blir sentripetalakselerasjonen

$$a_\mathrm{N} = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Vi oppsummerer:

En partikkel som beveger seg med konstant fart v i en sirkel med radius R, har en ***sentripetalakselerasjon* a** med størrelse

$$a_\mathrm{N} = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

og retning inn mot sentrum i sirkelen.

Eksempel 2.2.5: En bil kjører med fart på 36 km/h gjennom en horisontal rundkjøring som har radius $R = 20\,\mathrm{m}$. Hvor stor er sentripetalakselerasjonen?

Løsning: Farten er

$$v = 36\,\mathrm{km/h} = 36 \cdot \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 10\,\mathrm{m/s}.$$

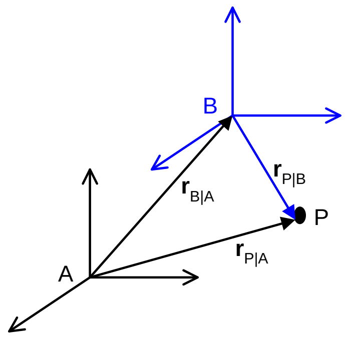
Da blir sentripetalakselerasjonen

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(10\,\mathrm{m/s})^2}{20\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{5.0\,\mathrm{m/s^2}}}\,.$$

Oppgave: 2.2.4.

Vi skal senere se mer på sirkelbevegelse i forbindelse med krefter.

*2.2.6. Relativ bevegelse.



Hittil har vi hele tiden referert all bevegelse til *ett* koordinatsystem. Noen ganger må vi forholde oss til *to* koordinatsystem, og undersøke hvordan en bevegelse beskrives i de to koordinatsystemene. Vi tenker oss da at vi har et fast koordinatsystem *A* og et annet koordinatsystem *B*, der *B* beveger seg med konstant fart $\mathbf{v}_{B|A}$ i forhold til *A* uten å rotere. Posisjonen til en partikkel *P* er $\mathbf{r}_{P|A}$ i forhold til koordinatsystem A, og $\mathbf{r}_{P|B}$ i forhold til de koordinatsystem B.

Dersom $\mathbf{r}_{B|A}$ er posisjonen til origo i *B* i forhold til *A*, blir

$$\mathbf{r}_{P|A} = \mathbf{r}_{P|B} + \mathbf{r}_{B|A}\,.$$

Vi deriverer denne sammenhengen, og får at

$$\frac{d\mathbf{r}_{P|A}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{P|B}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{B|A}}{dt}\,.$$

Men disse uttrykkene er jo hastigheter, slik at vi får:

$$\mathbf{v}_{P|A} = \mathbf{v}_{P|B} + \mathbf{v}_{B|A}\,.$$

Dette er den generelle sammenhengen mellom hastigheten til en partikkel målt i to koordinatsystem som beveger seg med konstant fart i forhold til hverandre uten å rotere.

Eksempel 2.2.6: Du skal ro over en elv som er 60 m bred. I stille vann ror du med en konstant fart på $1.5\,\mathrm{m/s}$. Elva strømmer med konstant fart på $0.5\,\mathrm{m/s}$.

a) Hvor treffer du den andre elvebredden dersom du ror vinkelrett på bredden?
b) Hvordan må du ro dersom du skal treffe elvebredden rett ovenfor startstedet?

Løsning: Her er

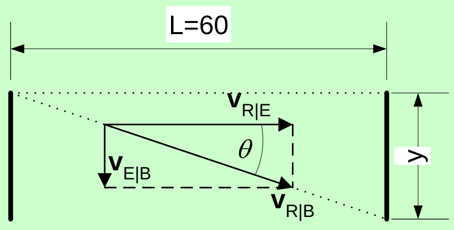
$$\mathbf{v}_{R|B} = \mathbf{v}_{R|E} + \mathbf{v}_{E|B}$$

der vi har:

$\mathbf{v}_{R|B}$ er hastigheten til robåten i forhold til bredden.

$\mathbf{v}_{R|E} = 1.5\,\mathrm{m/s}$ er hastigheten til robåten i forhold til elva.

$\mathbf{v}_{E|B} = 0.5\,\mathrm{m/s}$ er hastigheten til elva i forhold til bredden.



Av figuren ser vi at båten får en avdrift gitt ved vinkelen θ der

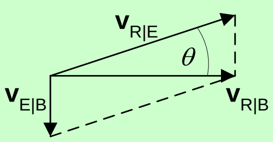
$$\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}_{E|B}|}{|\mathbf{v}_{R|E}|} = \frac{0.5\,\mathrm{m/s}}{1.5\,\mathrm{m/s}} = \tfrac{1}{3}.$$

Da treffer du den andre bredden en strekning

$$y = L\tan\theta = 60\,\mathrm{m}\cdot\tfrac{1}{3} = \underline{\underline{20\,\mathrm{m}}}$$

nedenfor et punkt som ligger rett ovenfor startstedet.

b) For å treffe bredden rett ovenfor startstedet, må hastighetene være som vist nedenfor:



Vi ser at for å unngå avdrift, må du ro skrått mot strømmen i en vinkel θ gitt ved

$$\sin\theta = \frac{|\mathbf{v}_{E|B}|}{|\mathbf{v}_{R|E}|} = \frac{0.5\,\mathrm{m/s}}{1.5\,\mathrm{m/s}} = \frac{1}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{19.5^\circ}}\ .$$

Oppgave: 2.2.5.

*2.3. Utledninger.

2.3.1. Akselerasjon ved krumlinjet bevegelse.

Vi skal nå ta utgangspunkt i at hastigheten kan skrives på formen

$$\mathbf{v} = v\cdot\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{T}$$

der $\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{T}$ er en enhetsvektor som er tangent til banen. Så skal vi finne akselerasjonen ved å derivere dette uttrykket. Men da må vi huske på at enhetsvektoren $\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{T}$ ikke lenger er konstant. Siden den alltid skal være *tangent* til banen, kan den derfor endre *retning* under bevegelsen.

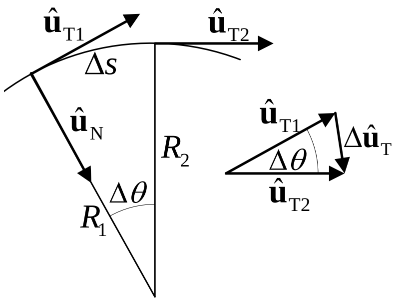
Når vi deriverer, må vi derfor bruke derivasjonsregelen for et produkt:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\left(v\cdot\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{T}\right)}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{T} + v\cdot\frac{d\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{T}}{dt}.$$

Vi ser at akselerasjonsvektoren må dekomponeres i to retninger:

- Størrelsen $\dfrac{dv}{dt}$ angir den momentane endringen av *farten* med hensyn på tid. Dette er nettopp det vi til daglig kaller ”akselerasjon”. Denne størrelsen har retning langs tangenten til banen. Vi kaller den derfor ”tangentialakselerasjon” eller ”bane-akselerasjon”.

- Størrelsen $\dfrac{d\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{T}}{dt}$ blir et mål for retningsendringen til $\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{T}$.



La oss se nærmere på størrelsen $\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt}$ ved hjelp av figuren til venstre. Der er $\hat{\mathbf{u}}_{T1}$ og $\hat{\mathbf{u}}_{T2}$ enhetsvektoren $\hat{\mathbf{u}}_T$ ved to tidspunkt. På den lille figuren ser du

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}_T = \hat{\mathbf{u}}_{T2} - \hat{\mathbf{u}}_{T1}.$$

Når vinkelen $\Delta\theta$ er svært liten kan vi tilnærmet sette $R_1 = R_2 = R$, der R er banens ***krumningsradius***.

Vi finner igjen den samme vinkelen $\Delta\theta$ på begge figurene. Da blir

$$\frac{|\Delta\hat{\mathbf{u}}_T|}{|\hat{\mathbf{u}}_T|} \approx \frac{\Delta s}{R} \quad \Leftrightarrow \quad |\Delta\hat{\mathbf{u}}_T| \approx \frac{\Delta s}{R}$$

fordi $|\hat{\mathbf{u}}_T| = 1$. Videre benytter vi at når $\Delta t \to 0$, må også $\Delta\theta \to 0$ slik at de tilnærmingene vi har gjort blir stadig bedre. Da får vi:

$$\left|\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\hat{\mathbf{u}}_T|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{1}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta s}{R}\right) = \frac{1}{R}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}\cdot v\,.$$

Av figuren ser vi også at når $\Delta\theta \to 0$ vil $\Delta\hat{\mathbf{u}}_T$ få samme retning som $\hat{\mathbf{u}}_N$. Vi samler trådene, og får:

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt} = \left|\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt}\right|\cdot\hat{\mathbf{u}}_N = \underline{\frac{v}{R}\cdot\hat{\mathbf{u}}_N}\,.$$

Nå gjenstår det bare å sette kronen på verket:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot\hat{\mathbf{u}}_T + v\cdot\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot\hat{\mathbf{u}}_T + v\cdot\frac{v}{R}\cdot\hat{\mathbf{u}}_N = \underline{\underline{\frac{dv}{dt}\cdot\hat{\mathbf{u}}_T + \frac{v^2}{R}\cdot\hat{\mathbf{u}}_N}} = a_T\cdot\hat{\mathbf{u}}_T + a_N\cdot\hat{\mathbf{u}}_N\,.$$

2.4. Sammendrag.

Symbol:	***Norsk betegnelse:***	***Engelsk betegnelse:***
t	tid	time
x, $\mathbf{r}$	posisjon	position
v	fart	speed
$\mathbf{v}$	hastighet	velocity
a, $\mathbf{a}$	akselerasjon	acceleration
$\mathbf{r}_{A\|B}$	posisjonen til A i forhold til B	A's position relative to B.
$\mathbf{v}_{A\|B}$	hastigheten til A i forhold til B	A's velocity relative to B.

$$v = \frac{dx}{dt}, \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{u}}_T + \frac{v^2}{R}\hat{\mathbf{u}}_N$$

Her er $\mathbf{u}_T$ en enhetsvektor som er tangent til banen, R er banens krumningsradius i punktet, og $\mathbf{u}_N$ er en enhetsvektor som peker inn mot krumningssenteret.

Dersom akselerasjonen er konstant, er

$v = v_0 + at$, $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$, $x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$

Dersom et koordinatsystem B har posisjon $\mathbf{r}_{B|A}$ og hastighet $\mathbf{v}_{B|A}$ i forhold til koordinatsystem A uten å rotere, er $\mathbf{r}_{P|A} = \mathbf{r}_{P|B} + \mathbf{r}_{B|A}$ og $\mathbf{v}_{P|A} = \mathbf{v}_{P|B} + \mathbf{v}_{B|A}$.

2.5. Oppgaver med løsninger.

2.5.1. Småoppgaver i teksten.

***Oppgave 2.1.1*:**
Hvor mye tid sparer du inn pr km dersom den konstante farten økes fra $72\,\mathrm{km/h}$ til $80\,\mathrm{km/h}$?

***Oppgave 2.1.2*:**
En veistrekning har fartsgrense på $80\,\mathrm{km/h}$. Hvor lang tid vil en bilist som nå bruker 12 minutter på denne strekningen bruke dersom fartsgrensen reduseres til $60\,\mathrm{km/h}$? Gå ut fra at bilisten hele tiden kjører nøyaktig på fartsgrensen.

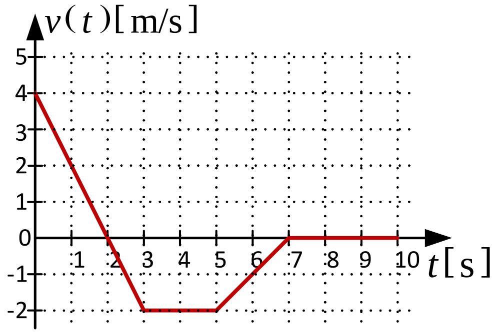
Oppgave 2.1.3:
Posisjonen til en partikkel (gitt i meter) er gitt ved

$$x(t) = 1.0\,\mathrm{m} - (2.0\,\mathrm{m}) \cdot e^{-\alpha t} + (1.0\,\mathrm{m}) \cdot e^{-\beta t}$$

der $\alpha = 1.0\,\mathrm{s}^{-1}$ og $\beta = 2.0\,\mathrm{s}^{-1}$.

a) Hvorfor har α og β benevning s^{-1}?
b) Finn farten $v(t)$ og akselerasjonen $a(t)$, og tegn grafene til $x(t)$, $v(t)$ og $a(t)$ under hverandre. Hva ser du når $a(t) = 0$?

Oppgave 2.1.4:



På figuren til venstre finner du en grafisk framstilling av farten $v(t)$ til en partikkel. Tegn figurer der du for de første 10 sekundene tegner grafene til:

a) akselerasjonen $a(t)$ til partikkelen.
b) posisjonen $x(t)$ til partikkelen, når $x(0) = 1$.

Oppgave 2.1.5:
Posisjonen til en partikkel er gitt ved

$x(t) = (1.0\,\mathrm{m/s^3})t^3 - (12\,\mathrm{m/s^2})t^2 + (36\,\mathrm{m/s})t$ når $0\,\mathrm{s} \le t \le 6\,\mathrm{s}$, der t er tiden målt i sekunder.

a) Tegn et posisjon-tid-diagram. Bruk gjerne et eller annet dataverktøy.

b) Bestem gjennomsnittlig fart i tidsintervallet fra $t = 0\,\mathrm{s}$ til $t = 2\,\mathrm{s}$, og i tidsintervallet fra $t = 2\,\mathrm{s}$ til $t = 5\,\mathrm{s}$.

c) Finn et uttrykk for partikkelens fart som funksjon av tiden t, og bruk det uttrykket til å finne den momentane farten når $t = 1\,\mathrm{s}$ og når $t = 4\,\mathrm{s}$.

d) Finn et uttrykk for partikkelens akselerasjon. Beskriv med ord hvordan partikkelen beveger seg når akselerasjonen er lik null.

Oppgave 2.1.6:

En bil som kjører i 60 km/h bråbremser. Bremsesporene er 25 meter lange.

a) Finn bilens akselerasjon, og beregn hvor lang tid oppbremsingen tar.

b) En annen bil kjører i 80 km/h på samme strekningen. Også denne bilen må bråbremse. Hvor langt kjører denne bilen før den stopper når du antar at akselerasjonen er den samme som for den første bilen, samt at føreren av den siste bilen har en reaksjonstid på 0.5 sekunder fra han ser hindringen til bremsene begynner å virke.

Oppgave 2.1.7:

En liten stein kastes rett oppover fra et punkt som ligger 9.80 meter over bakken. Steinen kommer 3.25 meter over startpunktet før den snur. Se bort fra luftmotstand.

a) Hvor stor startfart hadde steinen?

b) Hvor lang tid tar det før steinen treffer bakken, og hvor stor fart har den da?

Oppgave 2.1.8:

En bil kjører med en konstant fart på 72 km/time. Dessverre er fartsgrensen på stedet mye lavere. En politikonstabel på motorsykkel tar opp jakten. Idet motorsykkelen starter, er bilen 48 meter foran. Motorsykkelen har konstant akselerasjon på 4.0 m/s^2. Hvor stor fart har motorsykkelen idet bilen tas igjen?

Oppgave 2.1.9:

To partikler beveger seg på samme rette linje. I startøyeblikket befinner de seg i samme punkt. Partikkel A beveger seg da mot høyre med konstant fart $v_\mathrm{A} = 2.0\,\mathrm{m/s}$, mens partikkel B beveger seg mot venstre med startfart $v_{0,\mathrm{B}} = -3.0\,\mathrm{m/s}$ og akselerasjon $a = 4.0\,\mathrm{m/s}$, slik at B vil snu og "ta opp jakten" på A.

a) Vis at det tar 2.5 sekunder fra de starter til B tar igjen A.

b) Hvor lang strekning har hver av de to partiklene tilbakelagt idet B tar igjen A?

Oppgave 2.1.10:

I denne oppgaven skal du sette tyngdeakselerasjonen $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$, og se bort fra luftmotstand. Ei kule slippes fra et punkt A som ligger 20.0 m over bakken.

a) Hvor stor fart har kula når den passerer punktet B som ligger 7.2 m under A?

b) Idet kula passerer B, skytes ei anna kule rett opp fra bakken. Hvor stor startfart har denne kula når begge kulene treffer bakken samtidig?

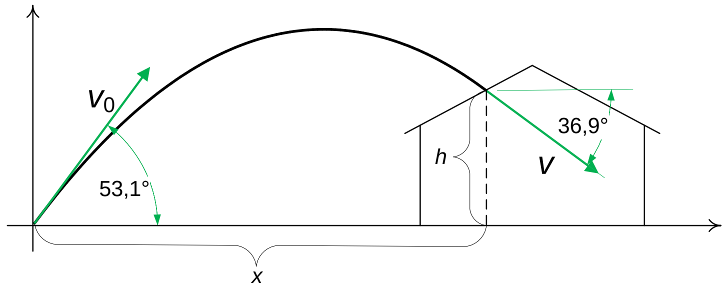
Oppgave 2.2.1:

Posisjonen til en partikkel er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ 4t - 5t^2 \end{bmatrix}, \quad 0 \le t \le 1.$$

a) Finn partikkelens hastighet og akselerasjon.
b) Tegn partikkelens bane. Tegn også inn hastighetsvektoren ved tidspunktet $t = 0.3$, og finn størrelsen av hastigheten ("farten") ved dette tidspunktet.

Oppgave 2.2.2:



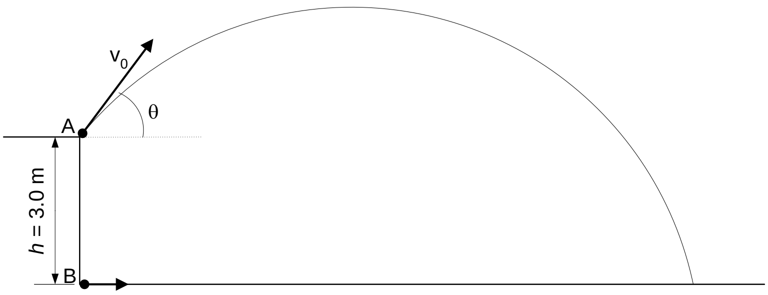
En liten stein kastes med startfart $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ og vinkel $\theta_0 = 53.1^\circ$ mot et hustak. Steinen treffer taket med fart v og vinkel $\varphi = 36.9^\circ$ under horisontalplanet. Se figuren over. Se bort fra luftmotstand.

Finn farten v, og vis at det tar 2.55 sekunder fra steinen kastes ut og til den treffer taket.
Finn deretter kastvidden x og høyden h.

Oppgave 2.2.3:

I denne oppgaven kan du sette tyngdens akselerasjon $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

En liten kule A er plassert en høyde $h = 3.0\,\mathrm{m}$ over en annen liten kule B. Begge kulene settes samtidig i bevegelse. Kule A kastes skrått ut med starfart v_0 som danner en vinkel $\theta = 53.1^\circ$ over horisontalplanet. Kule B beveger seg rettlinjet i horisontalplanet. Se bort fra luftmotstand, og betrakt kulene som partikler.



a) Kule B beveger seg med konstant fart $v_B = 3.0\,\mathrm{m/s}$. Bestem størrelsen til v_0 slik at kule A kan treffe kule B.
b) Vi gjentar forsøket, men lar nå kule B ha konstant akselerasjon $a = 3.0\,\mathrm{m/s^2}$. Kula starter med starfart $0\,\mathrm{m/s}$. Bestem også nå størrelsen til starfarten v_0 til kule A slik at den kan treffe kule B.

Oppgave 2.2.4:
Vi antar at svingen på en skøytebane er 100 meter lang og formet som en halvsirkel. Finn sentripetalakselerasjonen til en dyktig skøyteløper som går gjennom svingen på 7.0 sekunder.

Oppgave 2.2.5:
Ei vogn som er 6.00 m lang og 2.50 m bred glir langs en lasterampe med fart $1.00\,\mathrm{m/s}$. En person går skrått over vogna fra ett hjørne til det diagonalt motsatte hjørnet, med en fart på $1.30\,\mathrm{m/s}$. Finn størrelse og retning til personens hastighet i forhold til lasterampen.

2.5.2. Blandede oppgaver.

Oppgave 2.1:
To spreke fysikkstudenter, Arne og Bjarne, møtes utenfor Nordlysobservatoriet i Tromsø for å ta sin daglige joggetur rundt Prestvannet.
"Hvor lang er en runde rundt Prestvannet?" spør Arne.
"Det kan vi finne ut", svarer Bjarne.
De starter samtidig fra samme sted, men løper i hver sin retning. Arne fullfører en runde på 6 minutter og 48 sekunder, fortsetter i samme fart, og møter Bjarne 50 meter etter at Arne fullførte runden. Bjarne fullfører sin runde på 7 minutter og 12 sekunder.
Hvor lang er en runde rundt Prestvannet? Gå ut fra at begge joggerne holder konstant fart.

Oppgave 2.2:
Et skråplan har slik helning at en partikkel som glir på skråplanet har en akselerasjon med størrelse $4.00\,\mathrm{m/s^2}$ ned langs skråplanet. Den skrå flaten er 1.28 m lang.
Se bort fra friksjon i hele oppgaven.

a) En partikkel slippes uten startfart på toppen av skråplanet. Finn partikkelens fart ved foten av skråplanet. Hvor lang tid trenger den for å gli ned skråplanet?
b) Partikkelen sendes rett opp skråplanet, og trenger da 0.32 sekunder fra skråplanets fot og til toppen. Finn partikkelens fart ved foten og på toppen av skråplanet.
c) Partikkelen sendes på ny rett opp skråplanet, men har nå en startfart på 5.00 m/s ved skråplanets fot. En annen partikkel slippes samtidig uten startfart fra toppen av skråplanet.
    1) Hvor vil partiklene passere (eller treffe) hverandre?
    2) Hvor stor startfart måtte den nederste partikkelen hatt dersom partiklene skulle møtt hverandre midt på skråplanet?

Oppgave 2.3:
En topp-sprinter løper 100 meter på 10.0 sekunder fra han forlater startblokkene til han passerer mållinja. Vi antar at han har konstant akselerasjon de første 25 metrene, og at han deretter løper med konstant fart de siste 75 metrene. Hvor stor er denne konstante farten?

Oppgave 2.4:
Farten til en partikkel er gitt ved $v(t) = e^{-t} - e^{-2t}$.
Finn partikkelens akselerasjon $a(t)$, og finn partikkelens posisjon $x(t)$ når $x(0) = 0$.

Oppgave 2.5:

En partikkel beveger seg langs *x*-aksen. Farten til partikkelen er gitt ved

$$v(t) = t^2 - \tfrac{1}{9}t^3 \text{ når } 0 \le t \le 10.$$

a) Finn partikkelens akselerasjon $a(t)$.
Når har partikkelen størst fart?

b) Finn partikkelens posisjon $x(t)$ når du vet at partikkelen starter i origo ($x(0) = 0$).
Når er partikkelen lengst vekk fra origo, og hvor stor er denne største avstanden?

Oppgave 2.6:

Farten til en partikkel er gitt ved $v(t) = \dfrac{v_0}{(t+1)^2}$.

a) Vis at ved tidspunktet *t* har partikkelen beveget seg en strekning

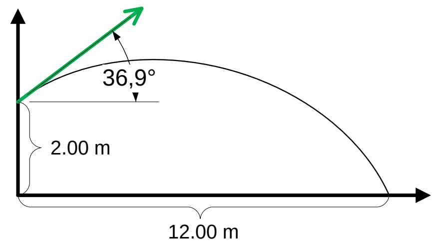
$$s(t) = \frac{v_0 t}{t+1} \text{ når } s(0) = 0.$$

Du kan benytte at $\displaystyle\int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = \frac{-1}{t+1} + C$.

b) To partikler A og B beveger seg i samme retning langs *x*-aksen. Begge partiklene starter samtidig fra origo. A har den farten som er gitt i oppgave a) ovenfor. B beveger seg med en konstant fart $v_B = \tfrac{1}{4}v_0$.
I) Ved hvilket tidspunkt er A lengst foran B?
II) Ved hvilket tidspunkt når B igjen A?

c) Vi setter i gang et nytt kappløp mellom A og B der partiklene har de hastighetene som er angitt i oppgave b) ovenfor. Partiklene starter samtidig, men slik at B får et forsprang l_0 på A. Hva er det største forspranget B kan få for at A skal klare å ta igjen B?

Oppgave 2.7:



Et kulestøt måler 12.00 meter. Du har filmet kulestøtet, og finner at idet kula forlot handa til kulestøteren var kula 2.00 meter over bakken mens vinkelen mellom kulebanen og horisontalplanet da var 36.9°. Hvor stor fart hadde kula idet den forlot handa til kulestøteren?

Oppgave 2.8:

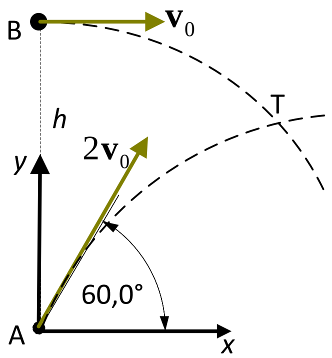
Ei kanonkule skytes ut av en kanon med utgangsfarta $50.0\,\mathrm{m/s}$. Utgangsfarta danner vinkelen 35° med det horisontale underlaget. Vi antar at kanonkula skytes ut ved bakkenivå.

a) Hvor høyt over bakken er kanonkula på sitt høyeste?

b) En høy vegg befinner seg $200\mathrm{m}$ fra kanonen. Hvor høyt på veggen vil kanonkula treffe?

c) Ved å variere utgangsvinkelen vil kanonkula kunne treffe høyere oppe på veggen. Hva må utgangsvinkelen være for at kula skal treffe høyest mulig på veggen, og hvor høyt treffer da kula?

Oppgave 2.9:

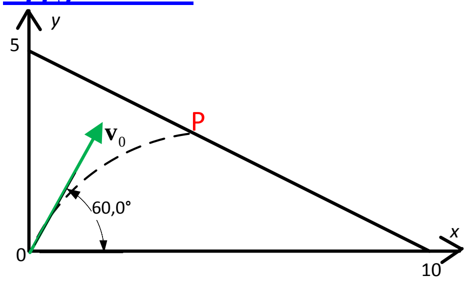


En kule A kastes skrått oppover med en startfart $2v_0$ og utgangsvinkel $\theta = 60°$ med horisontalplanet. *Samtidig* kastes en annen kule B horisontalt med startfart v_0. Startpunktet for B er rett over A, i en høyde *h* over A.
Kulene beveger seg i samme vertikale plan.
Vi ser bort fra luftmotstand i hele oppgaven.

a) Sett opp bevegelseslikningene (for posisjon og for hastighet) for hver av kulene. Bruk vektor- eller komponentform etter valg.

b) Kulene treffer hverandre i punktet T.
   1) Finn koordinatene til T uttrykt ved v_0, g og *h*.
   2) Bestem v_0 slik at T får *y*-komponent $\frac{1}{2}h$, og vis at da må T ligge på toppen av kastbanen til kule A.

Oppgave 2.10:



Noen barn sitter under ei låvebru og skyter ut småstein. Utskytningsvinkelen er hele tiden $\theta = 60^\circ$, og steinene skytes ut fra origo. Låvebrua er gitt ved likningen

$$y = 5 - \tfrac{1}{2}x\,.$$

Se bort fra luftmotstand, og sett tyngdens akselerasjon

$$g = 10\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

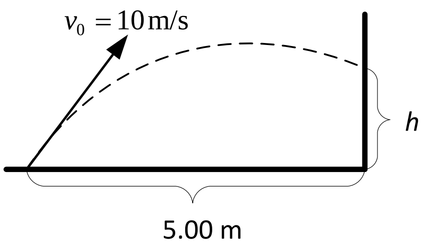
a) Finn koordinatene til treffpunktet P når startfarten $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$.

b) Hva er den minste startfarten du kan ha for å treffe låvebrua?

Oppgave 2.11:

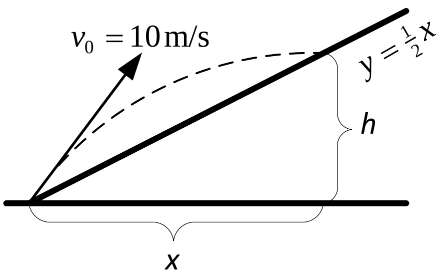
I denne oppgaven skal vi benytte ei kule som skytes skrått oppover med en startfart v_0 under en vinkel på 53.1° over horisontalplanet. Gå ut fra at alle bevegelser foregår i et vertikalt plan.

a)



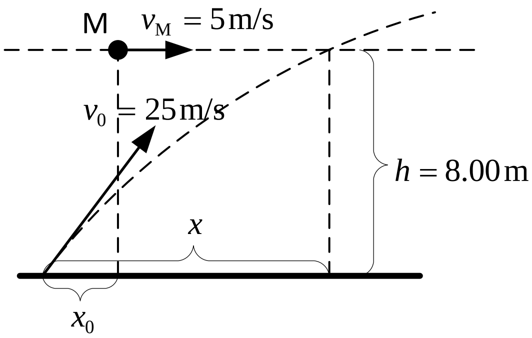
Kula har startfart $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$, og skytes ut mot en loddrett mur som står $5.00\,\mathrm{m}$ fra utskytnings-punktet. Hvor høyt opp på muren treffer kula?

b)



Kula har fremdeles startfart $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$, og skytes ut oppover en motbakke der helnings-vinkelen er slik at $y = \frac{1}{2}x$. Hvor treffer kula bakken?

c)



En måse M flyr med konstant fart $v_{\mathrm{M}} = 5.00\,\mathrm{m/s}$ i konstant høyde $h = 8.00\,\mathrm{m}$ over flat mark. Kula har nå startfart $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}$. Hvor må måsen være idet kula skytes ut for at kula skal treffe måsen, og hvor lang er den horisontale strekningen x fra det stedet der kula ble skutt ut til det stedet der kula treffer måsen?

Oppgave 2.12:
Banen til en partikkel er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(-t^3 + 3t^2\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(t^3 - 6t^2 + 9t\right)\hat{\mathbf{j}}$$

der $\hat{\mathbf{i}}$ og $\hat{\mathbf{j}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x- og y-retning.

a) Tegn grafen til partikkelens bane når $0 \le t \le 3$. Bruk gjerne dataverktøy.
b) Finn hastighetsvektoren **v** og akselerasjonsvektoren **a**.
c) 1) Sett $t = 1$, og vis at da står **a** vinkelrett på **v**. Hvor er partikkelen da? Tegn inn **v** og **a** på figuren fra a). Bruk passe lengdeenheter.
   2) Forklar at når **a** står vinkelrett på **v**, har farten (d.v.s. $|\mathbf{v}|$) enten lokalt maksimum eller lokalt minimum.
   3) Fins det andre punkter der akselerasjonsvektoren står vinkelrett på hastighetsvektoren?

2.5.3. Løsninger på småoppgaver i teksten.

Oppgave 2.1.1:
Vi benytter at når farten er konstant, er

$$v = \frac{x}{t} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x}{v}.$$

$$72\,\mathrm{km/h} = \frac{72 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{m/s}\,,\quad 80\,\mathrm{km/h} = \frac{80 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 22.2\,\mathrm{m/s}\,.$$

Innspart tid pr km blir da

$$\frac{1000\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{m/s}} - \frac{1000\,\mathrm{m}}{22.2\,\mathrm{m/s}} = \underline{\underline{5.0\,\mathrm{s}}}\,.$$

Oppgave 2.1.2:
Når bilen kjører en strekning s med konstant fart v på en tid t, er $s = v \cdot t$. Siden bilen kjører like langt før og etter endringen av fartsgrensen, er

$$(60\,\mathrm{km/h}) \cdot t = (80\,\mathrm{km/h}) \cdot (12\,\mathrm{min}) \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{(80\,\mathrm{km/h}) \cdot (12\,\mathrm{min})}{60\,\mathrm{km/h}} = \underline{\underline{16\,\mathrm{min}}}\,.$$

Legg merke til at vi ikke trenger å regne om fra km/h til m/s fordi omregningsfaktoren forkortes bort.

Oppgave 2.1.3:

a) Siden tiden t har benevning sekund (s), må α og β ha benevning s^{-1} slik at eksponenten skal bli ubenevnt.

b) $x(t) = 1 - 2e^{-\alpha t} + e^{-\beta t}$ der $\alpha = 1.0\mathrm{s}^{-1}$ og $\beta = 2.0\mathrm{s}^{-1}$.

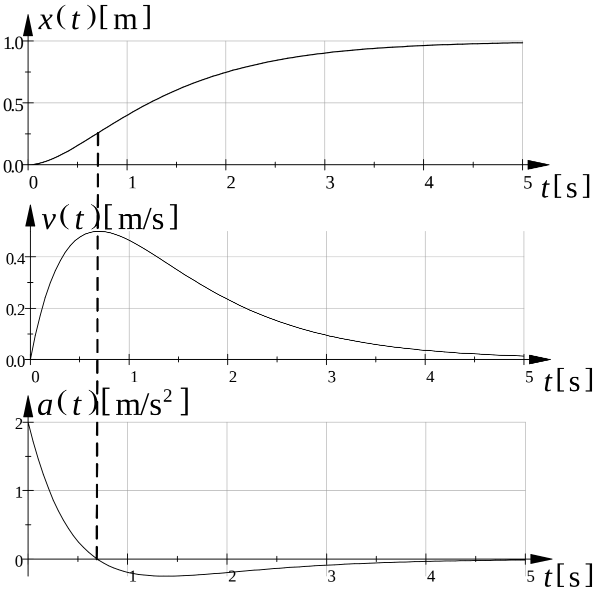
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = (-2\,\mathrm{m})(-\alpha)e^{-\alpha t} - (1\,\mathrm{m})\cdot\beta e^{-\beta t}$$

$$= (-2\,\mathrm{m})(-1\mathrm{s}^{-1})e^{-(1\mathrm{s}^{-1})\cdot t} - (1\,\mathrm{m})\cdot(2\mathrm{s}^{-1})e^{-(2\mathrm{s}^{-1})t}$$

$$= \underline{\underline{(2\,\mathrm{m/s})\cdot e^{(-1\mathrm{s}^{-1})\cdot t} - (2\,\mathrm{m/s})\cdot e^{(-2\mathrm{s}^{-1})\cdot t}}}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = (2\,\mathrm{m/s})(-1\mathrm{s}^{-1})e^{-(1\mathrm{s}^{-1})\cdot t} - (2\,\mathrm{m/s})\cdot(-2\mathrm{s}^{-1})e^{-(2\mathrm{s}^{-1})t}$$

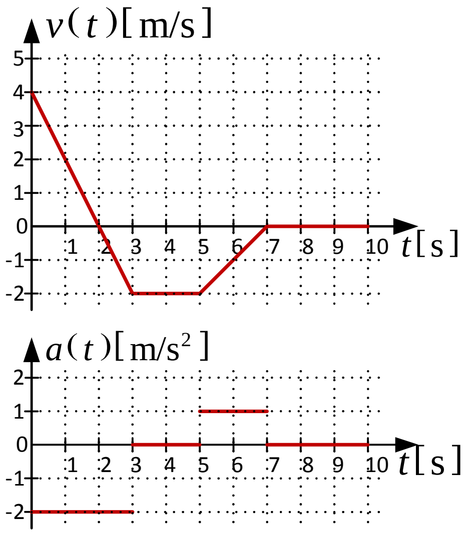
$$= \underline{\underline{(-2\,\mathrm{m/s})\cdot e^{(-1\mathrm{s}^{-1})\cdot t} + (4\,\mathrm{m/s})\cdot e^{(-2\mathrm{s}^{-1})\cdot t}}}$$



(I praksis dropper vi gjerne benevningene i slike situasjoner, og tar bare med tallverdiene).

Grafene er vist til venstre. Vi ser at så lenge $a(t) > 0$, vil farten øke. Når $a(t) = 0$, har farten sin største verdi. Da vokser også $x(t)$ fortest.

Oppgave 2.1.4:



Leser av noen data fra figuren:

Når $0.0\mathrm{s} < t < 3.0\mathrm{s}$ er akselerasjonen konstant. Vi får

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(-2.0\,\mathrm{m/s}) - 4.0\,\mathrm{m/s}}{3.0\mathrm{s}} = \underline{-2.0\,\mathrm{m/s^2}}\,.$$

Når $3.0\mathrm{s} < t < 5.0\mathrm{s}$ er farten konstant:

$$v = -2.0\,\mathrm{m/s}\,,\ a = \underline{0.0\,\mathrm{m/s^2}}\,.$$

Når $5.0\mathrm{s} < t < 7.0\mathrm{s}$ er akselerasjonen konstant. Vi får

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(0.0\,\mathrm{m/s}) - (-2.0\,\mathrm{m/s})}{2.0\mathrm{s}} = \underline{1.0\,\mathrm{m/s^2}}\,.$$

Når $7.0\mathrm{s} < t < 10.0\mathrm{s}$ er farten konstant:

$$v = 0.0\,\mathrm{m/s}\,,\ a = \underline{0.0\,\mathrm{m/s^2}}\,.$$

Dette gir akselerasjonsgrafen til venstre.

Så må vi finne posisjonen $x(t)$. Når $0\,\text{s} < t < 3\,\text{s}$, er $v_0 = 4.0\,\text{m/s}$, $a = -2.0\,\text{m/s}^2$ og $x_0 = 1.0\,\text{m}$. Da blir

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 = 1.0\,\text{m} + (4.0\,\text{m/s})t + \tfrac{1}{2}(-2.0\,\text{m/s}^2)t^2$$
$$= \underline{1.0\,\text{m} + (4.0\,\text{m/s})t - (1.0\,\text{m/s}^2)t^2}$$

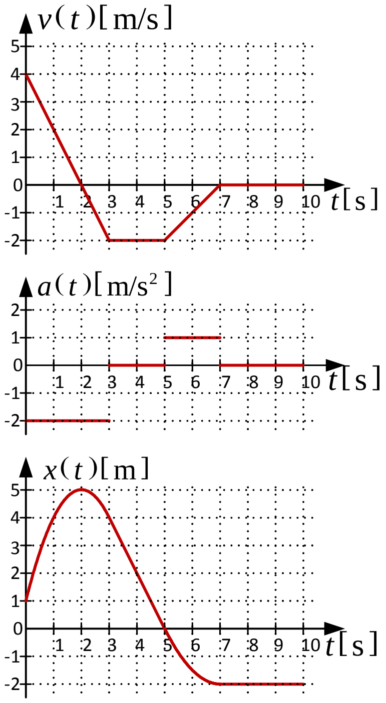
Dersom vi skal tegne grafen til denne andregradsfunksjonen for hand, kan vi merke oss at $x(t)$ må øke så lenge farten er positiv, og får derfor sin største verdi når $t = 2.0\,\text{s}$. Da er

$$x_{\text{max}} = x(2.0\,\text{s}) = 1.0\,\text{m} + (4.0\,\text{m/s})\cdot(2.0\,\text{s}) - (1.0\,\text{m/s}^2)\cdot(2.0\,\text{s})^2 = \underline{5.0\,\text{m}}.$$

I endepunktet av intervallet blir

$$x(3.0\,\text{s}) = 1.0\,\text{m} + (4.0\,\text{m/s})\cdot(3.0\,\text{s}) - (1.0\,\text{m/s}^2)\cdot(3.0\,\text{s})^2 = \underline{4.0\,\text{m}}$$

som også blir startpunktet for intervallet $3.0\,\text{s} < t < 5.0\,\text{s}$.



Hvis vi starter med $t_1 = 0$ i intervallet $3.0\,\text{s} < t < 5.0\,\text{s}$, blir

$$x(t_1) = x(3.0\,\text{s}) + v\cdot t_1 = \underline{4.0\,\text{m} - (2.0\,\text{m/s})\cdot t_1}$$

i dette intervallet. I endepunktet (når $t_1 = 2.0\,\text{s}$) blir

$$x(t = 5.0\,\text{s}) = x(t_1 = 2.0\,\text{s})$$
$$= 4.0\,\text{m} - (2.0\,\text{m/s})\cdot(2.0\,\text{s}) = \underline{0.0\,\text{m}}$$

som også er startpunktet for intervallet $5.0\,\text{s} < t < 7.0\,\text{s}$ der $v_0 = -2.0\,\text{m/s}$ og $a = 1.0\,\text{m/s}^2$. Hvis vi starter med $t_2 = 0$ i dette intervallet, blir posisjonen

$$x(t_2) = x(t = 5.0\,\text{s}) + v_0\cdot t_2 + \tfrac{1}{2} a\cdot {t_2}^2$$
$$= 0.0\,\text{m} + (-2.0\,\text{m/s})\cdot t_2 + \tfrac{1}{2}\cdot(1.0\,\text{m/s}^2)\cdot t_2$$
$$= \underline{(-2.0\,\text{m/s})\cdot t_2 + (0.5\,\text{m/s}^2)\cdot {t_2}^2}$$

Siden farten er negativ i hele dette intervallet, vil denne andregradsfunksjonen ha sin største verdi $x_{\text{max}} = 0.0\,\text{m}$ når $t_2 = 0.0\,\text{s}$ og sin minste verdi når $t_2 = 2.0\,\text{s}$.

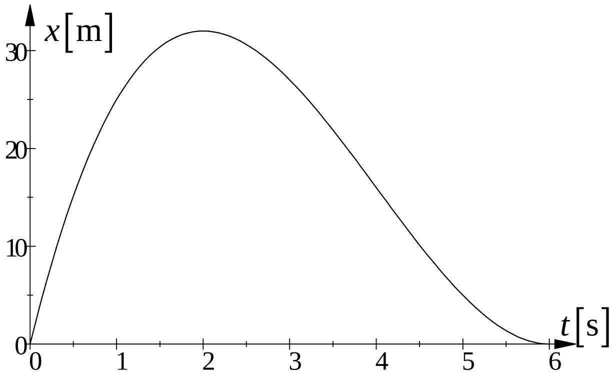
$$x_{\text{min}} = x(t_2 = 2.0\,\text{s}) = (-2.0\,\text{m/s})\cdot(2.0\,\text{s}) + (0.5\,\text{m/s}^2)\cdot(2.0\,\text{s})^2 = \underline{-2.0\,\text{m}}.$$

Når $7.0\,\text{s} < t < 10.0\,\text{s}$ er farten konstant, $v = 0\,\text{m/s}$. Da er også akselerasjonen $a = 0\,\text{m/s}^2$. Posisjonen blir $x(t) = x(7) = -2.0\,\text{m}$.

Oppgave 2.1.5:

$$x(t) = (1.0\,\text{m/s}^3)t^3 - (12\,\text{m/s}^2)t^2 + (36\,\text{m/s})t \text{ når } 0\,\text{s} \le t \le 6\,\text{s}.$$

a) Posisjon-tid-grafen er vist nedenfor.



b) I tidsintervallet fra $t = 0\,\mathrm{s}$ til $t = 2\,\mathrm{s}$ er gjennomsnittsfarten

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(2) - x(0)}{2-0}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{(2^3 - 12\cdot 2^2 + 36\cdot 2) - 0}{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{8 - 48 + 72}{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{16\,\mathrm{m/s}}}\,.$$

I tidsintervallet fra $t = 2\,\mathrm{s}$ til $t = 5\,\mathrm{s}$ er gjennomsnittsfarten

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(5) - x(2)}{5-2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{(5^3 - 12\cdot 5^2 + 36\cdot 5) - (2^3 - 12\cdot 2^2 + 36\cdot 2)}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$= \frac{(125 - 300 + 180) - (8 - 48 + 72)}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{5 - 32}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{-9\,\mathrm{m/s}}}$$

c) Farten er

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \underline{\underline{3t^2 - 24t + 36}}\,.$$

Når $t = 1$, er farten

$$v(1) = (3\cdot 1^2 - 24\cdot 1 + 36)\,\mathrm{m/s} = \underline{\underline{15\,\mathrm{m/s}}}\,.$$

Når $t = 4$, er farten

$$v(4) = (3\cdot 4^2 - 24\cdot 4 + 36)\,\mathrm{m/s} = \underline{\underline{-12\,\mathrm{m/s}}}\,.$$

d) Akselerasjonen er

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \underline{\underline{6t - 24}}\,.$$

Akselerasjonen er lik null når $6t - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \underline{4}$.

Da er partikkelen på vei tilbake mot utgangspunktet med en fart som har størrelse $12\,\mathrm{m/s}$.

Oppgave 2.1.6:

a) Vi starter med å notere ned det vi vet, og legger origo der bremsesporene starter:

$$x_0 = 0\,\mathrm{m}\,,\ x = 25\,\mathrm{m}\,,\ v_0 = 60\,\mathrm{km/h} = 60\cdot\frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 16.7\,\mathrm{m/s}\,,\ v = 0\,\mathrm{m/s}\,.$$

Standard-likningene for $x(t)$ og $v(t)$ inneholder både *a* og *t*, som er de ukjente størrelsene. Det er derfor enklest å starte med en av de to tilleggs-likningene, for eksempel:

$$v^2 - v_0^{\,2} = 2a(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{v^2 - v_0^{\,2}}{2(x - x_0)} = \frac{(0^2 - 16.7^2)\,\mathrm{m^2/s^2}}{2(25-0)\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{-5.58\,\mathrm{m/s^2}}}\,.$$

Så finner vi *t*:

$$v = v_0 + at \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{(0 - 16.7)\,\mathrm{m/s}}{-5.58\,\mathrm{m/s^2}} = \underline{\underline{3.0\,\mathrm{s}}}\,.$$

b) Nå er startfarten $v_0 = 80\,\text{km/h} = 80 \cdot \dfrac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = \underline{22.2\,\text{m/s}}$. Reaksjons-strekningen blir da

$$x_R = v_0 t = (22.2\,\text{m/s}) \cdot (0.5\,\text{s}) = \underline{11.1\,\text{m}}.$$

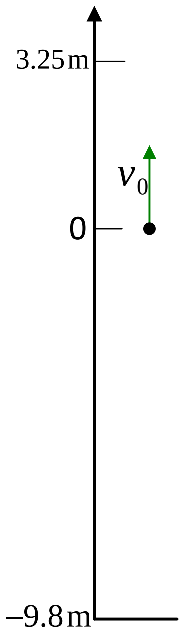
Mens bilen bremser, kjører den en strekning x som vi kan finne slik:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{(0^2 - 22.2^2)\,\text{m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot (-5.58\,\text{m/s}^2)} = \underline{44.2\,\text{m}}.$$

Samlet strekning blir da

$$11.1\,\text{m} + 44.2\,\text{m} = \underline{\underline{55.3\,\text{m}}}.$$

Oppgave 2.1.7:



Legger inn en y-akse med positiv retning oppover og origo i steinens startpunkt. Da blir $y_0 = 0.0\,\text{m}$ og akselerasjonen $a = -g = -9.81\,\text{m/s}^2$. Bevegelseslikningene blir, etter innsetting av disse størrelsene:

$$v = v_0 - gt, \qquad y = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Her er både v_0 og t ukjente, slik at vi må løse et likningssystem med to ukjente. Vi prøver heller en av de andre likningene:

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot s.$$

I topp-punktet er $v_0 = 0\,\text{m/s}$. Vi vet også at $a = -g$, og at $s = 3.25\,\text{m}$. Setter inn:

$$(0\,\text{m/s})^2 - v_0^2 = 2(-g) \cdot (3.25\,\text{m})$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot (9.81\,\text{m/s}^2) \cdot (3.25\,\text{m})} = \underline{\underline{8.0\,\text{m/s}}}$$

Når steinen treffer bakken, er $y = -9.8\,\text{m}$. Da kan vi finne t av

$$y = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} g t^2 - v_0 t + y = 0$$

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot y}}{2 \cdot \frac{1}{2} g} = \frac{8.0\,\text{m/s} \pm \sqrt{(8.0\,\text{m/s})^2 - 2 \cdot (9.81\,\text{m/s}^2) \cdot (-9.8\,\text{m})}}{9.81\,\text{m/s}^2}$$

$$= \frac{8.0\,\text{m/s} \pm 16.0\,\text{m/s}}{9.81\,\text{m/s}^2} = \begin{cases} 2.45\,\text{s} \\ -0.82\,\text{s} \end{cases}$$

Her må vi bruke løsningen $t = \underline{\underline{2.45\,\text{s}}}$. (Den andre løsningen angir at dersom steinen hadde blitt kastet opp fra bakken, måtte den startet $0.82\,\text{s}$ *før* den passerte vårt startpunkt.) Da er farten

$$v = v_0 - gt = 8.0\,\text{m/s} - (9.81\,\text{m/s}^2) \cdot (2.45\,\text{s}) = \underline{\underline{-16.0\,\text{m/s}}}.$$

Minustegnet angir at farten har retning *mot* vår positive retning.

Oppgave 2.1.8:
Bilens fart er

$$v_0 = 72\,\text{km/time} = 72 \cdot \frac{1000}{3600}\ \text{m/s} = \underline{20\ \text{m/s}}.$$

Vi legger origo i det punktet der motorsykkelen starter. Da har bilen et forsprang $x_0 = 48\,\text{m}$ idet motorsykkelen starter. Vi setter opp likningene for bilens og motorsykkelens posisjoner:

Bilen: $x_B = x_0 + v_0 t$.

Motorsykkelen: $x_M = \tfrac{1}{2} a t^2$.

Idet motorsykkelen tar igjen bilen, er

$$x_B = x_M \quad \Leftrightarrow \quad x_0 + v_0 t = \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} a t^2 - v_0 t - x_0 = 0 .$$

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^{\,2} + 2 a x_0}}{a} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 2 \cdot 4 \cdot 48}}{4} = \frac{20 \pm 28}{4} = \begin{cases} 12 \\ -2 \end{cases}$$

Den eneste mulige verdien er $t = 12$, som gir en fart

$$v = a \cdot t = \left(4\ \text{m/s}^2\right) \cdot (12\ \text{s}) = \underline{\underline{48\ \text{m/s}}} .$$

Oppgave 2.1.9:

a) Vi legger origo i partiklenes felles startpunkt. Posisjonene til de to partiklene er da gitt ved:

$$x_A = v_A t$$

$$x_B = v_{0,B} t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

De to partiklene er i samme punkt når

$$x_A = x_B \quad \Leftrightarrow \quad v_A t = v_{0,B} t + \tfrac{1}{2} a t^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} a t^2 = \left(v_A - v_{0,B}\right) t$$

$$\Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \vee \quad t = \frac{2}{a}\left(v_A - v_{0,B}\right) = \frac{2}{4.0\,\text{m/s}}\left(2.0\,\text{m/s} - \left(-3.0\,\text{m/s}\right)\right) = \underline{\underline{2.5\,\text{s}}}$$

b) Partikkel A har tilbakelagt en strekning

$$x_A = v_A t = 2.0\,\text{m/s} \cdot 2.5\,\text{s} = \underline{\underline{5.0\,\text{m}}} .$$

Partikkel B må først snu før den tar opp jakten på A. Idet B snur har den fart lik null:

$$v_B = v_{0,B} + a \cdot t_1 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{v_B - v_{0,B}}{a} = \frac{0\,\text{m/s} - \left(-3.0\,\text{m/s}\right)}{4.0\,\text{m/s}^2} = \underline{0.75\,\text{s}} .$$

Når B snur, er den i posisjon

$$x_{B,\text{snu}} = v_{0,B} t_1 + \tfrac{1}{2} a t_1^{\,2} = -3.0\,\text{m/s} \cdot 0.75\,\text{s} + \tfrac{1}{2} \cdot 4.0\,\text{m/s}^2 \left(0.75\,\text{s}\right)^2 = \underline{-1.125\,\text{m}} .$$

I alt har da B tilbakelagt en strekning

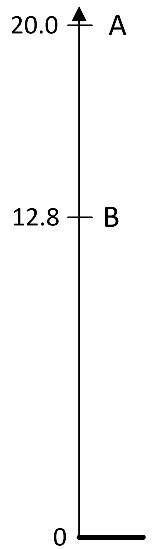
$$s_B = 1.25\,\text{m} + 1.25\,\text{m} + 5.0\,\text{m} = \underline{\underline{7.25\,\text{m}}} .$$

Oppgave 2.1.10:

a) Vi legger en akse med positiv retning *nedover* og origo der kula slippes. Da er start-posisjonen $x_A = 0\,\text{m}$, startfarten $v_A = 0\,\text{m/s}$ og akselerasjonen $a = g = 10\,\text{m/s}^2$. Så benytter vi bevegelseslikningen

$$v_B^{\,2} - v_A^{\,2} = 2a\left(x_B - x_A\right) \quad \Leftrightarrow \quad v_B = \sqrt{2 \cdot 10\,\text{m/s}^2 \cdot \left(7.2 - 0\right)\text{m}} = \underline{\underline{12.0\,\text{m/s}}} .$$

b)



Kaller farten idet den første kula passerer B for $v_{B0} = 12\,\text{m/s}$. Benytter et koordinatsystem med positiv retning *oppover* og origo på bakken. Idet kula som slippes i A passerer B, har den posisjon

$$y_{B0} = 20\,\text{m} - 7.2\,\text{m} = 12.8\,\text{m}.$$

Når denne kula treffer bakken, er $y = 0\,\text{m}$. Da får vi

$$0 = y_{B0} - v_{B0}t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Setter inn tall (og ser bort fra benevning):

$$0 = 12.8 - 12.0 \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5t^2 + 12t - 12.8 = 0$$

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-12.8)}}{10} = \frac{-12 \pm 20}{10} = \begin{cases} -3.2 \\ 0.8 \end{cases}$$

Den eneste brukbare løsningen er $t = 0.8\,\text{s}$.

Dersom den kula som skytes ut fra bakken skal bruke $0.8\,\text{s}$ på å komme tilbake til utgangspunktet, er

$$0 = v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = \tfrac{1}{2}gt = \tfrac{1}{2} \cdot 10\,\text{m/s}^2 \cdot 0.8\,\text{s} = \underline{\underline{4.0\,\text{m/s}}}$$

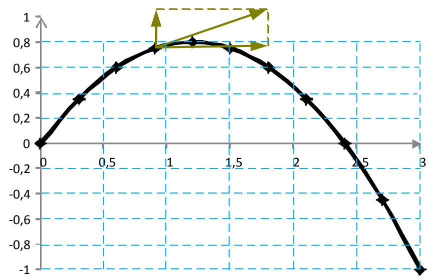
Oppgave 2.2.1:

a) $$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 - 10t \end{bmatrix}}}, \qquad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix}}}.$$

Av disse uttrykkene ser vi at:

- Komponenten av hastigheten i *x*-retning er konstant og har størrelse $v_x = 3$. Akselerasjonen har ingen komponent i *x*-retning.
- Komponenten av hastigheten i *y*-retning er $v_y = 4 - 10t$, og komponenten av akselerasjonen er $a_y = -10$.

b)



Banen til partikkelen er tegnet inn til venstre. Der er også hastighetsvektoren tegnet inn ved tidspunktet $t = 0.3$. Denne vektoren er slik:

$$\mathbf{v}(0.3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 - 10 \cdot 0.3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

Vi ser at **v** er tangent til banen.

Størrelsen av **v** (farten) er

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{3^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{10}}} \approx \underline{\underline{3.16}}.$$

Akselerasjonen er ikke tegnet inn.

Oppgave 2.2.2:

Siden akselerasjonen er konstant lik tyngdens akselerasjon, har vi at

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} v\cos\varphi \\ -v\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0\cos\theta_0 \\ v_0\sin\theta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} t.$$

Likningen for *x*-komponenten av hastigheten gir

$$v\cos\varphi = v_0\cos\theta_0 \quad \Leftrightarrow \quad v = v_0\frac{\cos\theta_0}{\cos\varphi} = 20\,\text{m/s}\cdot\frac{\cos 53.1^\circ}{\cos 36.9^\circ} = \underline{\underline{15.0\,\text{m/s}}}\,.$$

Likningen for y-komponenten av hastigheten gir nå

$$-v\sin\varphi = v_0\sin\theta_0 - gt \quad \Leftrightarrow \quad gt = v_0\sin\theta_0 + v\sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{9.81\,\text{m/s}^2}\left(20\,\text{m/s}\cdot\sin\left(53.1^\circ\right) + 15\,\text{m/s}\cdot\sin\left(36.9^\circ\right)\right) = \underline{\underline{2.55\,s}}$$

Steinens posisjon idet den treffer taket er

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\text{m} + \begin{bmatrix} 20\,\text{m/s}\cdot\cos\left(53.1^\circ\right) \\ 20\,\text{m/s}\cdot\sin\left(53.1^\circ\right) \end{bmatrix}\cdot 2.55\,\text{s} + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -9.81\,\text{m/s}^2 \end{bmatrix}\cdot\left(2.55\,\text{s}\right)^2$$

$$= \begin{bmatrix} 12\,\text{m/s} \\ 16\,\text{m/s} \end{bmatrix}\cdot 2.55\,\text{s} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{9.81}{2}\,\text{m/s}^2 \end{bmatrix}\cdot\left(2.55\,\text{s}\right)^2 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{30.6\,\text{m}}} \\ \underline{\underline{8.9\,\text{m}}} \end{bmatrix}$$

Oppgave 2.2.3:

a) I et slikt kast er x-komponenten til farten konstant. Dersom kule A skal treffe kule B, må

$$v_{\text{A}x} = v_\text{B} \quad \Leftrightarrow \quad v_0\cos\theta = v_\text{B} \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = \frac{v_\text{B}}{\cos\theta} = \frac{3.0\,\text{m/s}}{\cos 53.1^\circ} = \underline{\underline{5.0\,\text{m/s}}}\,.$$

b) Dersom kule A skal treffe kule B, må de ved et eller annet tidspunkt befinne seg i samme punkt. Setter opp likningene for posisjonene til kulene med B's startsted som origo:

$$\mathbf{r}_\text{A}(t) = \begin{bmatrix} x_\text{A}(t) \\ y_\text{A}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(v_0\cos\theta\right)\cdot t \\ h + \left(v_0\sin\theta\right)\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.600 v_0 t \\ h + 0.400 v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_\text{B}(t) = \begin{bmatrix} x_\text{B}(t) \\ y_\text{B}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}at^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi må nå kreve at

$$x_A = x_B \quad \wedge \quad y_\text{A} = y_\text{B} \quad \Leftrightarrow \quad 0.600 v_0 t = \tfrac{1}{2}at^2 \quad \wedge \quad h + 0.400 v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0\,.$$

Den første likningen gir nå

$$t = 0 \quad \vee \quad t = \frac{1.200 v_0}{a} = \frac{1.200 v_0}{3.0} = \underline{0.400 v_0}\,.$$

Løsningen $t = 0$ er åpenbart startøyeblikket. Bruker derfor løsningen $t = 0.400 v_0$.

Da gir den andre likningen

$$h + 0.400 v_0\cdot 0.40 v_0 - \tfrac{1}{2}g\left(0.40 v_0\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h + 0.160 v_0{}^2 - 0.800 v_0{}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.64 v_0{}^2 = 3.0 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{3.0}{0.64}} = \underline{\underline{2.17\,\text{m/s}}}$$

Oppgave 2.2.4:

Vi finner først svingradien R:

$$\tfrac{1}{2}\cdot 2\pi R = 100\,\text{m} \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{100\,\text{m}}{\pi} \approx \underline{32\,\text{m}}\,.$$

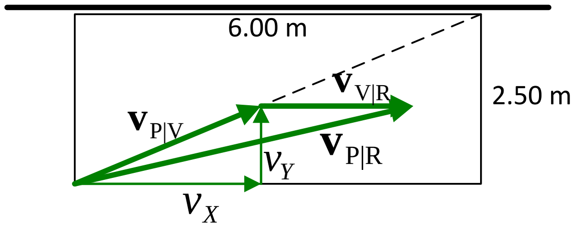
Så var det farten v, som vi antar er konstant gjennom hele svingen:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{100\,\text{m}}{7.0\,\text{s}} = \underline{14.3\,\text{m/s}}\,.$$

Da blir sentripetalakselerasjonen

$$a_\text{N} = \frac{v^2}{R} = \frac{(14.3\,\text{m/s})^2}{32\,\text{m}} = \underline{\underline{6.4\,\text{m/s}^2}}\,.$$

Oppgave 2.2.5:



Lar $\mathbf{v}_{\text{P|V}}$, $\mathbf{v}_{\text{V|R}}$ og $\mathbf{v}_{\text{P|R}}$ være hastigheten til henholdsvis personen i forhold til vogna, vogna i forhold til rampen, og personen i forhold til rampen. Da blir

$$\mathbf{v}_{\text{P|R}} = \mathbf{v}_{\text{P|V}} + \mathbf{v}_{\text{V|R}}$$

som vist på figuren til venstre.

Dekomponerer $\mathbf{v}_{\text{P|V}}$ i de to komponentene v_X og v_Y. Da er

$$\frac{v_Y}{v_X} = \frac{2.50\,\text{m}}{6.00\,\text{m}} \quad\Leftrightarrow\quad v_Y = \tfrac{5}{12}v_X\,.$$

Videre er

$$v_X{}^2 + v_Y{}^2 = (1.30\,\text{m/s})^2 \quad\Leftrightarrow\quad v_X{}^2 + \left(\tfrac{5}{12}v_X\right)^2 = 1.69\,\text{m}^2/\text{s}^2 \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{169}{144}v_x{}^2 = 1.69\,\text{m}^2/\text{s}^2$$

$$\Leftrightarrow\quad v_X{}^2 = 1.44\,\text{m}^2/\text{s}^2 \quad\Leftrightarrow\quad v_X = \underline{1.20\,\text{m/s}} \quad\Leftrightarrow\quad v_Y = \tfrac{5}{12}\cdot 1.20\,\text{m/s} = \underline{0.50\,\text{m/s}}$$

Da blir

$$\mathbf{v}_{\text{P|R}} = \begin{bmatrix}(1.20+1.00)\,\text{m/s}\\ 0.50\,\text{m/s}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.20\,\text{m/s}\\ 0.50\,\text{m/s}\end{bmatrix}$$

slik at

$$|\mathbf{v}_{\text{P|R}}| = \sqrt{(2.20\,\text{m/s})^2 + (0.50\,\text{m/s})^2} = \underline{\underline{2.26\,\text{m/s}}}\,,$$

mens vinkelen med rampen blir

$$\tan\theta = \frac{0.50\,\text{m/s}}{2.20\,\text{m/s}} \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \underline{\underline{12.8^\circ}}\,.$$

2.5.4. Svar på blandede oppgaver.

Oppgave 2.1:
$L = 1750\,\text{m}$.

Oppgave 2.2:
$v = 3.20\,\text{m/s}$, $t = 0.80\,\text{s}$; $v_0 = 4.64\,\text{m/s}$, $v = 3.36\,\text{m/s}$; $x_\text{A} = 0.131\,\text{m}$, $v_{0\text{A}} = -2.26\,\text{m/s}$.

Oppgave 2.3:
$v = 12.5\,\text{m/s}$.

Oppgave 2.4:
$a(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t}$, $\quad x(t) = \tfrac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(e^{-t} - 1)^2$.

Oppgave 2.5:
$a(t) = 2t - \frac{1}{3}t^2, \quad t = 6 \quad \Leftrightarrow \quad v_{\text{max}} = 12, \quad x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{36}t^4, \quad t = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x_{\text{max}} = \frac{243}{4}.$

Oppgave 2.6:
$s(t) = \dfrac{v_0 t}{t+1}, \quad t = 1.0\,\text{s}, \qquad t = 3.0\,\text{s}, \qquad l_0 = \left(\frac{1}{4}\text{s}\right) \cdot v_0 .$

Oppgave 2.7:
$v = 10.0\,\text{m/s}.$

Oppgave 2.8:
$h_{\text{max}} = 41.9\,\text{m}, \qquad y = 23.1\,\text{m}, \quad \theta = 5.19^\circ, \qquad y_{\text{max}} = 48.9\ \text{m}.$

Oppgave 2.9:
$$\mathbf{r}_\text{A}(t) = \begin{bmatrix} v_0 t \\ v_0\sqrt{3}\,t - \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_\text{A}(t) = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_0\sqrt{3} - gt \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_\text{B}(t) = \begin{bmatrix} v_0 t \\ h - \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_\text{B}(t) = \begin{bmatrix} v_0 \\ -gt \end{bmatrix}.$$
$$\mathbf{r}_\text{T} = \begin{bmatrix} \frac{h}{\sqrt{3}} \\ h - \frac{gh^2}{6v_0^2} \end{bmatrix}, \qquad v_0 = \sqrt{\frac{gh}{3}}.$$

Oppgave 2.10:
$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 3.10\,\text{m} \\ 3.45\,\text{m} \end{bmatrix}, \qquad v_0 \geq 8.96\,\text{m/s}.$$

Oppgave 2.11:
$h = 3.26\,\text{m};\ x = 6.12\,\text{m},\ y = 3.06\,\text{m};\ x_0 = 4.5\,\text{m},\ x = 6.8\,\text{m}.$

Oppgave 2.12:
$\mathbf{v} = \left(-3t^2 + 6t\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(3t^2 - 12t + 9\right)\hat{\mathbf{j}},\ \mathbf{a} = \left(-6t + 6\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(6t - 12\right)\hat{\mathbf{j}};\ \left(2, 4\right);\ \left(\frac{27}{8}, \frac{27}{8}\right).$