Oppgave 2.1.

Vi kaller lengden av en runde for L. Farten til joggerne er da:

$$v_\mathrm{A} = \frac{L}{6\cdot 60+48}\ \mathrm{m/s} = \frac{L}{408}\ \mathrm{m/s}$$

$$v_\mathrm{B} = \frac{L}{7\cdot 60+12}\ \mathrm{m/s} = \frac{L}{432}\ \mathrm{m/s}$$

Når de møtes, har de løpt like lenge. Da er

$$t = \frac{L+50\ \mathrm{m}}{v_\mathrm{A}} = \frac{L-50\ \mathrm{m}}{v_\mathrm{B}}.$$

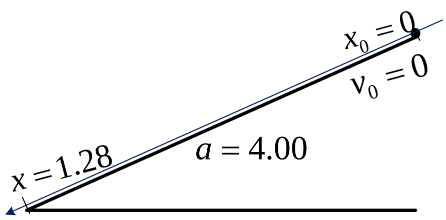
Setter inn for v_A og v_B, og dropper benevninger for enkelhets skyld:

$$\frac{L+50}{\frac{L}{408}} = \frac{L-50}{\frac{L}{432}} \quad \Leftrightarrow \quad 408(L+50) = 432(L-50)$$

$$\Leftrightarrow \quad 408L + 20400 = 432L - 21600 \quad \Leftrightarrow \quad 24L = 42000 \quad \Leftrightarrow \quad L = \underline{\underline{1750\ \mathrm{m}}}$$

Oppgave 2.2:

a)



Legger en akse langs skråplanet med positiv retning nedover og nullpunkt i skråplanets øverste punkt. Da er $x_0 = 0\,\mathrm{m}$, $x = 1.28\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$, og $a = 4.00\,\mathrm{m/s^2}$. Setter opp bevegelseslikningene for konstant akselerasjon, og merker av kjente størrelser:

$$\boxed{x} = \boxed{x_0} + \boxed{v_0}\cdot t + \tfrac{1}{2}\boxed{a}\cdot t^2, \qquad v = \boxed{v_0} + \boxed{a}\cdot t.$$

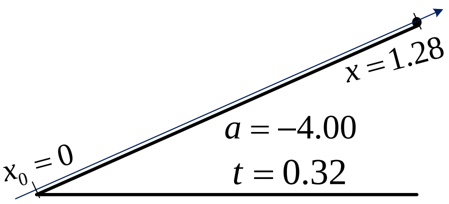
Finner først t av den første likningen (ser bort fra benevninger):

$$1.28 = 0 + 0\cdot t + \tfrac{1}{2}\cdot 4.0\cdot t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 0.64 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm 0.80.$$

Vi kan kun bruke den positive verdien, slik at $\underline{\underline{t = 0.80\,\mathrm{s}}}$.

Da er $v = 0\,\mathrm{m/s} + 4.00\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0.80\,\mathrm{s} = \underline{\underline{3.20\,\mathrm{m/s}}}$.

b)



Nå er det mest naturlig å legge en ny akse med nullpunkt nederst på skråplanet og positiv retning oppover. Da er $x_0 = 0.00\,\mathrm{m}$ og akselerasjonen $a = -4.00\,\mathrm{m/s^2}$. I topp-punktet er $x = 1.28\,\mathrm{m}$. Da blir bevegelseslikningene:

$$\boxed{x} = \boxed{x_0} + v_0\cdot\boxed{t} + \tfrac{1}{2}\boxed{a}\cdot\boxed{t}^2, \qquad v = v_0 + \boxed{a}\cdot\boxed{t}.$$

Løser først v_0 av den første likningen, og får:

$$1.28\,\mathrm{m} = 0\,\mathrm{m} + v_0\cdot 0.32\,\mathrm{s} + \tfrac{1}{2}\left(-4.00\,\mathrm{m/s^2}\right)\cdot\left(0.32\,\mathrm{s}\right)^2$$

$$v_0 = \frac{1.28\,\mathrm{m}}{0.32\,\mathrm{s}} + 2.00\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0.32\,\mathrm{s} = \underline{\underline{4.64\,\mathrm{m/s}}}$$

Deretter blir

$$v = v_0 + a\cdot t = 4.64\,\mathrm{m/s} + \left(-4.00\,\mathrm{m/s^2}\right)\cdot\left(0.32\,\mathrm{s}\right) = \underline{\underline{3.36\,\mathrm{m/s}}}.$$

c1) Kaller partikkelen som sendes opp for A og partikkelen som slippes på toppen for B. Bruker aksen fra del a) av oppgaven. Begge partiklene har samme akselerasjon $a = 4.00\,\text{m/s}^2$. Ellers gjelder:

For A: $x_{0\text{A}} = 1.28\,\text{m}$, $v_{0\text{A}} = -5.00\,\text{m/s}$. $\quad x_\text{A} = x_{0\text{A}} + v_{0\text{A}}t + \frac{1}{2}at^2$.

For B: $x_{0\text{B}} = 0\,\text{m}$, $v_{0\text{B}} = 0\,\text{m/s}$. $\quad x_\text{B} = x_{0\text{B}} + v_{0\text{B}}t + \frac{1}{2}at^2$.

Når partiklene passerer (eller treffer) hverandre har de samme posisjon slik at $x_\text{A} = x_\text{B}$.
Setter inn, dropper benevninger og får:

$$x_{0\text{A}} + v_{0\text{A}}t + \cancel{\tfrac{1}{2}at^2} = x_{0\text{B}} + v_{0\text{B}}t + \cancel{\tfrac{1}{2}at^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1.28\,\text{m} - 5.00\,\text{m/s} \cdot t = 0 + 0t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1.28\,\text{m}}{5.00\,\text{m/s}} = \underline{0.256\,\text{s}}$$

Da er posisjonen

$$x_A = x_B = \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 4.00\,\text{m/s}^2 \left(0.256\,\text{s}\right)^2 = \underline{\underline{0.131\text{m}}} \text{ under toppen av skråplanet.}$$

c2) Nå er startfarten v_{0A} ukjent, men vi vet at

$$x_A = x_B = \tfrac{1}{2} \cdot 1.28\,\text{m} = 0.64\,\text{m}.$$

$$x_B = 0.64\,\text{m} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}at^2 = 0.64\,\text{m} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{2 \cdot 0.64\,\text{m}}{4.00\,\text{m/s}^2} = 0.32\,\text{s}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t = \pm 0.566\,\text{s}}.$$

Vi bruker den positive verdien, og får

$$x_A = x_{0A} + v_{0A}t + \tfrac{1}{2}at^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0.64\,\text{m} = 1.28\,\text{m} + v_{0A} \cdot 0.566\,\text{s} + \tfrac{1}{2} \cdot 4.00\,\text{m/s}^2 \cdot 0.32\,\text{s}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad v_{0A} = \frac{\left(0.64 - 1.28 - 0.64\right)\text{m}}{0.566\,\text{s}} = \underline{\underline{-2.26\,\text{m/s}}}$$

Oppgave 2.3:

Vi må dele opp 100-meteren i to strekninger:

- En strekning $x_1 = 25\,\text{m}$ som tilbakelegges på en tid t_1 med konstant akselerasjon *a*. Sluttfarten etter denne strekningen er *v*.
- En strekning $x_2 = 75\,\text{m}$ som tilbakelegges på en tid $t_2 = 10.0\,\text{s} - t_1$ med konstant fart lik *v*, som var sluttfarten fra startstrekningen.

Vi kan nå sette opp disse likningene:

- For den første strekningen der startfarten er lik null:
  $x_1 = \frac{1}{2}at_1^2, \qquad v = a \cdot t_1 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{v}{a}$.
- For den siste strekningen:
  $x_2 = v \cdot t_2 = v\left(10.0\,\text{s} - t_1\right)$.

Vi har nå 3 likninger med 3 ukjente. Vi starter med å sette inn for x_1, samt eliminere *a*:

$$25\,\text{m} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{v}{t_1}\right) \cdot t_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad v \cdot t_1 = 50\,\text{m}.$$

Så setter vi inn for x_2:

$$75\,\text{m} = v \cdot \left(10.0\,\text{s}\right) - v \cdot t_1 = v \cdot \left(10.0\,\text{s}\right) - 50\,\text{m} \quad \Leftrightarrow \quad v \cdot \left(10.0\,\text{s}\right) = 125\,\text{m}.$$

$$v = \frac{125\,\text{m}}{10.0\,\text{s}} = \underline{\underline{12.5\,\text{m/s}}}.$$

Oppgave 2.4:

$$v(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \underline{\underline{-e^{-t} + 2e^{-2t}}}.$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^x dx = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) dt \quad \Leftrightarrow \quad [x]_0^x = \left[-e^{-t} + \tfrac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow \quad x - 0 = -e^{-t} + \tfrac{1}{2}e^{-2t} + 1 - \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} + \tfrac{1}{2}}} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\left(e^{-t} - 1\right)^2}}$$

Oppgave 2.5:

$$v(t) = t^2 - \tfrac{1}{9}t^3, \quad 0 \le t \le 10.$$

a) $$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 2t - \tfrac{1}{9}\cdot 3t^2 = \underline{\underline{2t - \tfrac{1}{3}t^2}}.$$

Farten er størst når

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t - \tfrac{1}{3}t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t = 0 \vee t = 6}.$$

Vi ser direkte at $v(0) = 0$, som ikke kan være maksimumsverdi. Farten er da størst når $\underline{\underline{t = 6}}$. Da er $v_{\max} = v(6) = 6^2 - \tfrac{1}{9}\cdot 6^3 = \underline{\underline{12}}$.

b) $$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \int_0^t v(\tau)\,d\tau = \int_0^t \left(\tau^2 - \tfrac{1}{9}\tau^3\right) d\tau = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{36}t^4}}.$$

$x(t)$ er størst når $\dfrac{dx(t)}{dt} = v(t) = 0$, d.v.s. når $t^2 - \tfrac{1}{9}t^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t = 0} \vee \underline{t = 9}$.

Siden partikkelen starter i origo, må avstanden være størst når $\underline{\underline{t = 9}}$.

Da er $x_{\max} = x(9) = \tfrac{1}{3}\cdot 9^3 - \tfrac{1}{36}\cdot 9^4 = \underline{\underline{\tfrac{243}{4}}}$.

Oppgave 2.6:

$$v(t) = \frac{v_0}{(t+1)^2}$$

a) $$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^s ds = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \frac{v_0}{(t+1)^2}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad [s]_0^s = v_0\left[\frac{-1}{t+1}\right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow \quad s = v_0\left(\frac{-1}{t+1} - \frac{-1}{1}\right) = v_0\,\frac{-1 + (t+1)}{t+1} = \underline{\underline{\frac{v_0 t}{t+1}}}$$

bI) A har større startfart enn B, og avstanden mellom dem vil øke så lenge A har større fart enn B. Men A's fart avtar hele tiden. Altså vil A være lengst foran B når A og B har like stor fart. Da er:

$$\frac{v_0}{(t+1)^2} = \tfrac{1}{4}v_0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+1)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad t + 1 = \pm 2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \underline{1} \quad \vee \quad t = -3$$

(Den negative løsningen kan ikke brukes.)

Når vi tar med at t måles i sekund, blir $t = \underline{\underline{1\text{s}}}$.

bII) Vi har allerede vist at $x_A(t) = s = \dfrac{v_0 t}{t+1}$.

Siden B har konstant fart, er $x_B(t) = v_B t = \frac{1}{4}v_0 \cdot t$.

B når igjen A når

$$x_A(t) = x_B(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_0 t}{t+1} = \tfrac{1}{4}v_0 \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \vee \quad t+1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \vee \quad t = \underline{3}.$$

Når vi tar med at t måles i sekund, blir $t = \underline{\underline{3\text{s}}}$.

c) Dersom A så vidt skal nå igjen B, må de ha beveget seg like langt når de har samme fart. Fra b) vet vi at dette skjer når $t = 1$. Da befinner A seg i posisjonen

$$x_A(1) = \frac{v_0 \cdot 1}{1+1} = \tfrac{1}{2}v_0.$$

Siden B har fått et forsprang på l_0, vil B da befinner seg da i posisjonen

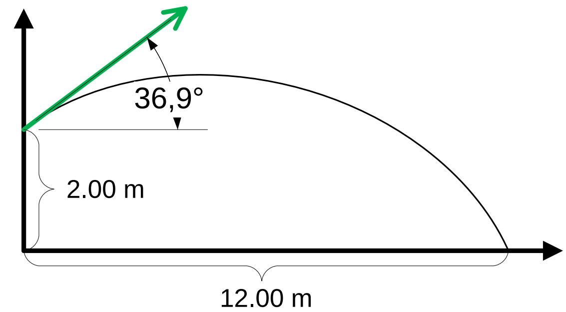
$$x_B(1) = l_0 + \tfrac{1}{4}v_0 \cdot 1 = l_0 + \tfrac{1}{4}v_0.$$

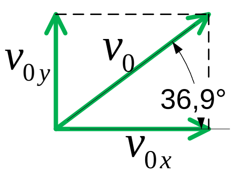
A tar så vidt igjen B dersom

$$x_A(1) = x_B(1) \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}v_0 = l_0 + \tfrac{1}{4}v_0 \quad \Leftrightarrow \quad l_0 = \tfrac{1}{2}v_0 - \tfrac{1}{4}v_0 = \underline{\underline{\tfrac{1}{4}v_0}}.$$

Her må l_0 måles i meter, mens v_0 må måles i m/s. Den tilsynelatende feilen i benevning skyldes at underveis er v_0 multiplisert med 1 sekund, noe som ikke vises i sluttsvaret.

Oppgave 2.7:





Vi legger et koordinatsystem med origo på bakken 2.00 m under det punktet der kula støtes ut, og med retninger som angitt på figuren. Da blir kulas posisjon gitt ved

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0x}t \\ y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}.$$

Av geometrien ser vi at

$$v_{0x} = v_0 \cos 36.9^\circ = 0.80 v_0,$$
$$v_{0y} = v_0 \sin 36.9^\circ = 0.60 v_0.$$

Idet kula treffer bakken er

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 12.00\,\text{m} \\ 0.00\,\text{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.80 v_0 t \\ 2.00\,\text{m} + 0.60 v_0 t - 4.9\,\text{m/s}^2 \cdot t^2 \end{bmatrix}.$$

Av den øverste likningen får vi nå

$$0.80 v_0 t = 12.00\,\text{m} \quad \Leftrightarrow \quad v_0 t = \frac{12.00\,\text{m}}{0.80} = 15.00\,\text{m}.$$

Setter dette inn i den nederste likningen, og får

$$0.00\,\text{m} = 2.00\,\text{m} + 0.60 \cdot 15.00\,\text{m} - 4.9\,\text{m/s}^2 \cdot t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{11.0\,\text{m}}{4.9\,\text{m/s}^2} = 2.24\,\text{s}^2.$$

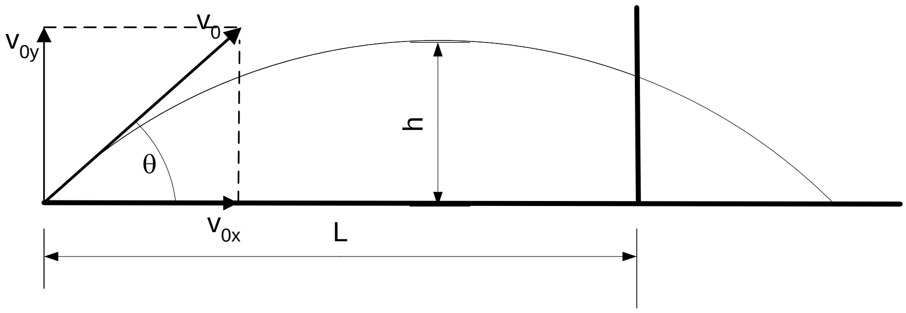
Da blir

$$t = \sqrt{2.24\,\text{s}^2} = \underline{1.50\,\text{s}}$$

slik at

$$v_0 t = 15.00\,\text{m} \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = \frac{15.00\,\text{m}}{1.50\,\text{s}} = \underline{\underline{10.0\,\text{m/s}}}.$$

Oppgave 2.8:



Setter opp bevegelseslikningene for et slikt kast. Legger origo i kulas startpunkt, med x-akse horisontalt og y-akse rett oppover:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + v_{0x}t \\ y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,\text{m} + v_0 \cos\theta \cdot t \\ 0\,\text{m} + v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \cos\theta \\ v_0 \sin\theta - gt \end{bmatrix}.$$

a) Når kula er i sitt høyeste punkt, er

$$v_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 \sin\theta - gt = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{g}\left(v_0 \sin\theta\right) = \frac{1}{9.81\,\text{m/s}^2}\left(50.0\,\text{m/s} \cdot \sin 35^\circ\right) = \underline{2.92\,\text{s}}$$

Da er

$$y = h_{\text{max}} = v_0 \sin\theta \cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 50\,\text{m/s} \cdot \sin 35^\circ \cdot 2.92\,\text{s} - \tfrac{1}{2} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot \left(2.92\,\text{s}\right)^2 = \underline{\underline{41.9\text{ m}}}$$

b) Kula treffer veggen en tid t_1 etter at den er skutt ut.

$$x = L = v_0 \cos\theta \cdot t_1 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{L}{v_0 \cos\theta} = \frac{200\,\text{m}}{50\,\text{m/s} \cdot \cos 35^\circ} = \underline{4.88\,\text{s}}.$$

Da er

$$y = h = v_0 \sin\theta \cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 50\,\text{m/s} \cdot \sin 35^\circ \cdot 4.88\text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot \left(4.88\,\text{s}\right)^2 = \underline{\underline{23.1\text{ m}}}$$

c) Når vi skal finne den startvinkelen θ som fører til at kula treffer høyest opp på veggen, må vi først finne y som funksjon av θ. Vi må da starte med å eliminere tiden t. Det gjør vi ved hjelp av likningen for x som vi vet er lik lengden L idet kula treffer veggen:

$$x = L = v_0 \cos\theta \cdot t_1 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{L}{v_0 \cos\theta}.$$

Dette settes inn i likningen for y:

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin\theta \cdot \frac{L}{v_0 \cos\theta} - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{L}{v_0 \cos\theta} \right)^2 = L \tan\theta - \frac{gL^2}{2v_0^{\,2}} \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Deriverer med hensyn på θ (og benytter at $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = (\cos\theta)^{-2}$ samt kjerneregel):

$$\frac{dy}{d\theta} = L \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{gL^2}{2v_0^{\,2}} (-2)(\cos\theta)^{-3}(-\sin\theta) = \frac{L}{\cos^2\theta}\left(1 - \frac{gL}{v_0^{\,2}} \tan\theta\right).$$

Vi får størst høyde når

$$\frac{dh}{d\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{gL}{v_0^{\,2}} \tan\theta = 0$$

$$\tan\theta = \frac{v_0^{\,2}}{gL} = \frac{(50\,\mathrm{m/s})^2}{9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 200\,\mathrm{m}} = 1.274 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\theta = 51.9^\circ}}$$

Da er

$$y_{\max} = L \tan\theta - \frac{gL^2}{2v_0^{\,2}} \frac{1}{\cos^2\theta} = (200\,\mathrm{m}) \cdot \tan 51.9^\circ - \frac{(9.81\,\mathrm{m/s^2})(200\,\mathrm{m})^2}{2(50\,\mathrm{m/s})^2 \cdot \cos^2 51.9^\circ} = \underline{\underline{48.9\,\mathrm{m}}}.$$

Oppgave 2.9:

a) Starthastigheten til kule A er

$$\mathbf{v}_{0\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 2v_0 \cos 60^\circ \\ 2v_0 \sin 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_0\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Da blir

$$\mathbf{r}_\mathrm{A}(t) = \mathbf{r}_{0\mathrm{A}} + \mathbf{v}_{0\mathrm{A}} t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_0 \\ v_0\sqrt{3} \end{bmatrix} t + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} t^2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} v_0 t \\ v_0\sqrt{3}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}}}.$$

$$\mathbf{v}_\mathrm{A}(t) = \mathbf{v}_{0\mathrm{A}} + \mathbf{a}t = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_0\sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} t = \underline{\underline{\begin{bmatrix} v_0 \\ v_0\sqrt{3} - gt \end{bmatrix}}}.$$

Starthastigheten til kule B er

$$\mathbf{v}_{0\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da blir

$$\mathbf{r}_\mathrm{B}(t) = \mathbf{r}_{0\mathrm{B}} + \mathbf{v}_{0\mathrm{B}} t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} t^2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} v_0 t \\ h - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}}}.$$

$$\mathbf{v}_\mathrm{B}(t) = \mathbf{v}_{0\mathrm{B}} + \mathbf{a}t = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} t = \underline{\underline{\begin{bmatrix} v_0 \\ -gt \end{bmatrix}}}.$$

b) Kulene treffer hverandre når

$$\mathbf{r}_\mathrm{A} = \mathbf{r}_\mathrm{B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} v_0 t \\ v_0\sqrt{3}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 t \\ h - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}.$$

Vi merker oss at for alle verdier av t er $x_\mathrm{A} = x_\mathrm{B}$. Vi finner treff-tidspunktet ved å løse likningen

$$y_A = y_B \quad \Leftrightarrow \quad v_0\sqrt{3}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2 = h - \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_0\sqrt{3}\,t = h \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{h}{v_0\sqrt{3}}.$$

Da blir

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_B\left(\frac{h}{v_0\sqrt{3}}\right) = \begin{bmatrix} v_0 \cdot \frac{h}{v_0\sqrt{3}} \\ h - \frac{1}{2}g\left(\frac{h}{v_0\sqrt{3}}\right)^2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{h}{\sqrt{3}} \\ h - \frac{gh^2}{6v_0^2} \end{bmatrix}}}.$$

Vi kunne også benyttet at $\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_A\left(\frac{h}{v_0\sqrt{3}}\right)$, men det ser litt mer komplisert ut.

Når $y_T = \frac{1}{2}h$, får vi at

$$h - \frac{gh^2}{6v_0^2} = \tfrac{1}{2}h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{gh}{6v_0^2} = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{gh}{3}}}}.$$

Med denne startfarten treffes kulene når

$$t = \frac{h}{v_0\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{gh}{3}}\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Da har kule A hastigheten

$$\mathbf{v}_A\left(\sqrt{\tfrac{h}{g}}\right) = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_0\sqrt{3} - gt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{gh}{3}} \\ \sqrt{\frac{gh}{3}}\cdot\sqrt{3} - g\cdot\sqrt{\frac{h}{g}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{gh}{3}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hastighetsvektoren er horisontal, slik at A er på toppen av kastbanen.

Oppgave 2.10:

a) Steinenes posisjon er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0\cos\theta\cdot t \\ v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (10\,\mathrm{m/s})\cdot\frac{1}{2}\cdot t \\ (10\,\mathrm{m/s})\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot t - \frac{1}{2}\cdot(10\,\mathrm{m/s^2})\cdot t^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (5.0\,\mathrm{m/s})\cdot t \\ (5\sqrt{3}\,\mathrm{m/s})\cdot t - (5\,\mathrm{m/s^2})\cdot t^2 \end{bmatrix}$$

Låvebru ar gitt ved likningen

$$y = 5 - \tfrac{1}{2}x.$$

Når steinen treffer låvebrua, må både *x* og *y* passe i likningen for låvebrua. Setter opp den algebraiske likningen som dette fører til:

$$y = 5 - \tfrac{1}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad 5\sqrt{3}\cdot t - 5t^2 = 5 - \tfrac{1}{2}\cdot 5t \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 2.232t + 1 = 0$$

$$t = \frac{2.232 \pm \sqrt{2.232^2 - 4}}{2} = \frac{2.232 \pm 0.990}{2} = \begin{cases} 1.61 \\ 0.62 \end{cases}$$

Her er det den laveste *t*-verdien vi skal bruke (den høyeste angir når steinen ville truffet låvebrua på vei ned dersom den hadde gått gjennom låvebrua). Vi får nå

$$x = (5.0\,\mathrm{m/s})\cdot t = (5.0\,\mathrm{m/s})\cdot 0.62\,\mathrm{s} = \underline{\underline{3.10\,\mathrm{m}}}.$$

$$y = 5 - \tfrac{1}{2}x = 5.0\,\mathrm{m} - \tfrac{1}{2}\cdot 3.10\,\mathrm{m} = \underline{\underline{3.45\ \mathrm{m}}}.$$

(Vi kunne også satt inn i uttrykket for $\mathbf{r}(t)$, men det gir litt mer regning).

b) Unnlater å sette inn for v_0. Da blir:

$$\mathbf{r}(t)=\begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_0\cos\theta\cdot t\\ v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}v_0\cdot t\\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot v_0\cdot t-\frac{1}{2}gt^2\end{bmatrix}$$

Setter inn i likningen for låvebrua:

$$y=5-\tfrac{1}{2}x \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot v_0\cdot t-5\cdot t^2=5-\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}v_0\cdot t\right) \quad\Leftrightarrow\quad 5t^2-\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{4}\right)v_0t+5=0$$

$$t=\frac{1.116v_0\pm\sqrt{1.246v_0^{\,2}-100}}{10}$$

For å få løsning, må vi ha noe positivt under rottegnet:

$$1.246v_0^{\,2}-100\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad v_0^{\,2}\geq 80.3 \quad\Leftrightarrow\quad v_0\geq \underline{\underline{8.96\,\text{m/s}}}\,.$$

Oppgave 2.11:

Legger origo i utskytningspunktet. I alle deloppgavene er kulas posisjon gitt ved

$$\mathbf{r}=\mathbf{v}_0t-\tfrac{1}{2}g\hat{\mathbf{j}}t^2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_0\cos\theta\\ v_0\sin\theta\end{bmatrix}t-\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0\\ g\end{bmatrix}t^2=\begin{bmatrix} 0.600v_0\cdot t\\ 0.800v_0\cdot t-\frac{1}{2}gt^2\end{bmatrix}$$

der jeg har satt inn tallverdiene for $\sin\theta$ og $\cos\theta$.

a) Kulas treffpunkt på muren er gitt ved $\begin{bmatrix} 5.00\,\text{m}\\ h\end{bmatrix}$. Setter inn $v_0=10\,\text{m/s}$, og får at

$$\begin{bmatrix} 6.00\,\text{m/s}\cdot t\\ 8.00\,\text{m/s}\cdot t-\frac{1}{2}gt^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5.00\,\text{m}\\ h\end{bmatrix}.$$

Av likningen for *x*-retningen får vi nå

$$6.00\,\text{m/s}\cdot t=5.00\text{ m} \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{5.00\,\text{m}}{6.00\,\text{m/s}}\approx\underline{0.833\text{s}}\,.$$

Setter dette inn i likningen for *y*-retningen:

$$8.00\,\text{m/s}\cdot 0.833\text{s}-\tfrac{1}{2}\cdot 9.81\text{m/s}^2\cdot(0.833\text{ s})^2=h$$

$$\underline{\underline{h=3.26\,\text{m}}}$$

b) Kulas treffpunkt i bakken er nå gitt ved $\begin{bmatrix} x\\ \frac{1}{2}x\end{bmatrix}$. Setter inn $v_0=10\,\text{m/s}$, og får at

$$\begin{bmatrix} 6.00\,\text{m/s}\cdot t\\ 8.00\,\text{m/s}\cdot t-\frac{1}{2}gt^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x\\ \frac{1}{2}x\end{bmatrix}$$

Likningen for *x*-retningen gir nå

$$x=6.00\,\text{m/s}\cdot t\,,$$

som settes inn i likningen for *y*-retningen:

$$8.00\,\text{m/s}\cdot t-\tfrac{1}{2}gt^2=\tfrac{1}{2}\cdot 6.00\,\text{m/s}\cdot t$$

$$8.00\,\text{m/s}\cdot t-3.00\,\text{m/s}\cdot t=\tfrac{1}{2}gt^2$$

$$5.00\,\text{m/s}\cdot t=\tfrac{1}{2}gt^2$$

Denne likningen har de to løsningene $t=0$ (som er start-tidspunktet) og

$$5.00\,\text{m/s}=\tfrac{1}{2}gt \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{2\cdot 5.00\,\text{m/s}}{g}=\frac{10\,\text{ms}}{9.81\text{m/s}^2}=\underline{1.02\,\text{s}}\,.$$

Da gir likningen for *x*-retningen

$$x = 6.00\,\mathrm{m/s}\cdot 1.02\,\mathrm{s} \approx \underline{\underline{6.12\,\mathrm{m}}}\,.$$

Til slutt gir dette

$$y = \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}\cdot 6.12\,\mathrm{m} = \underline{\underline{3.06\,\mathrm{m}}}\,.$$

c) Dersom måsen har startposisjonen $\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 8.00\,\mathrm{m}\end{bmatrix}$ idet kula skytes ut, er måsens posisjon gitt ved

$$\mathbf{r}_\mathrm{M} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_\mathrm{M}\cdot t \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} x_\mathrm{M} \\ y_\mathrm{M}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 8.00\,\mathrm{m}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.00\,\mathrm{m/s} \\ 0\,\mathrm{m/s}\end{bmatrix}\cdot t = \begin{bmatrix} x_0 + 5.00\,\mathrm{m/s}\cdot t \\ 8.00\,\mathrm{m}\end{bmatrix}$$

mens kulas posisjon er gitt ved

$$\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.600 v_0\cdot t \\ 0.800 v_0\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15\,\mathrm{m/s}\cdot t \\ 20\,\mathrm{m/s}\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2\end{bmatrix}$$

der jeg har satt inn $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}$. Kula treffer måsen når

$$\begin{bmatrix} x_0 + 5.00\,\mathrm{m/s}\cdot t \\ 8.00\,\mathrm{m}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15\,\mathrm{m/s}\cdot t \\ 20\,\mathrm{m/s}\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2\end{bmatrix}.$$

Av likningen for y-retningen får vi (når vi ser bort fra benevning)

$$8.00 = 20t - \tfrac{1}{2}\cdot 9.81t^2 \quad\Leftrightarrow\quad 4.905t^2 - 20t + 8.00 = 0\,.$$

Løser denne andregradslikningen:

$$t = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4\cdot 4.905\cdot 8.00}}{2\cdot 4.905} = \frac{20 \pm 15.59}{9.81} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} t_1 = 0.45\,\mathrm{s} \\ t_2 = 3.63\,\mathrm{s}\end{cases}$$

Her er t_1 tiden før kula kommer en høyde $h = 8.00\,\mathrm{m}$ over den flate marka på vei opp, mens t_2 er tiden da kula passerer samme høyde på vei ned. Vi benytter bare t_1 i resten av regningene. Vi finner x_0 av likningen for x-retningen:

$$x_0 + 5.00\,\mathrm{m/s}\cdot t = 15\,\mathrm{m/s}\cdot t$$

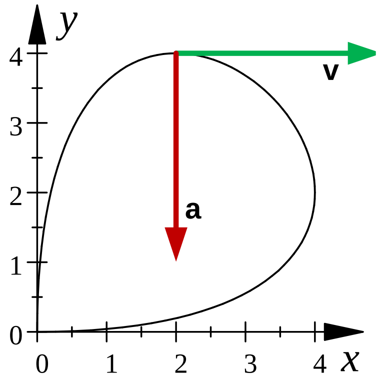
$$x_0 = 15\,\mathrm{m/s}\cdot t - 5.00\,\mathrm{m/s}\cdot t = 10.00\,\mathrm{m/s}\cdot 0.45\,\mathrm{s} = \underline{\underline{4.5\,\mathrm{m}}}$$

Da blir treffpunktets x-verdi

$$x = 15\,\mathrm{m/s}\cdot 0.45\,\mathrm{s} = \underline{\underline{6.8\,\mathrm{m}}}\,.$$

Oppgave 2.12:

a)



b)

$$\mathbf{r} = \left(-t^3 + 3t^2\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(t^3 - 6t^2 + 9t\right)\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \underline{\underline{\left(-3t^2 + 6t\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(3t^2 - 12t + 9\right)\hat{\mathbf{j}}}}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \underline{\underline{\left(-6t + 6\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(6t - 12\right)\hat{\mathbf{j}}}}$$

c1) Når $t = 1$, blir

$$\mathbf{v} = \left(-3\cdot 1^2 + 6\cdot 1\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(3\cdot 1^2 - 12\cdot 1 + 9\right)\hat{\mathbf{j}}$$

$$= \underline{\underline{3\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}}}}$$

$$\mathbf{a} = \left(-6\cdot 1 + 6\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(6\cdot 1 - 12\right)\hat{\mathbf{j}} = \underline{\underline{0\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}}}}$$

Vi ser at **a** står vinkelrett på **v** når $t = 1$ fordi

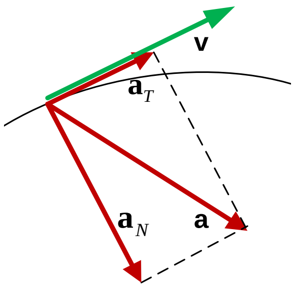
$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{a} = \left(3\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}}\right)\bullet\left(0\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}}\right) = 3\cdot 0 + 0\cdot(-6) = \underline{0}\,.$$

Vi vet at når skalarproduktet av to vektorer er lik null, står vektorene vinkelrett på hverandre. Vi ser at da er

$$\mathbf{r}(1) = \left(-1^3 + 3\cdot 1^2\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(1^3 - 6\cdot 1^2 + 9\cdot 1\right)\hat{\mathbf{j}} = \underline{2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}}$$

slik at partikkelen befinner seg i punktet $(2,\ 4)$. På figuren er **v** tegnet inn med samme lengdeenheter som **r**, mens **a** er tegnet inn med halvparten så store lengdeenheter.

c2)



Generelt kan akselerasjonsvektoren **a** dekomponeres i en komponent $\mathbf{a}_N$ vinklerett på banen og en komponent $\mathbf{a}_T$ langs banen, der $\mathbf{a}_T$ sørger for at **v** endrer *størrelse* mens $\mathbf{a}_N$ sørger for at fartsvektoren endrer *retning*. Mer presist er

$$\left|\mathbf{a}_T\right| = \frac{dv}{dt}$$

der $v = \left|\mathbf{v}\right|$.

Når **a** står vinkelrett på **v**, og vi vet at **v** er tangent til banen, betyr det at

$$\left|\mathbf{a}_T\right| = \frac{dv}{dt} = 0$$

slik at *v* har enten lokalt maksimum eller lokalt minimum.

c3) **a** og **v** står vinkelrett på hverandre dersom

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{v} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\left(-6t+6\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(6t-12\right)\hat{\mathbf{j}}\right)\bullet\left(\left(-3t^2+6t\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(3t^2-12t+9\right)\hat{\mathbf{j}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(-6t+6\right)\left(-3t^2+6t\right) + \left(6t-12\right)\left(3t^2-12t+9\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad -6\left(t-1\right)\left(-3t\right)\left(t-2\right) + 6\left(t-2\right)3\left(t^2-4t+3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad 18t\left(t-1\right)\left(t-2\right) + 18\left(t-2\right)\left(t-3\right)\left(t-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad 18\left(t-1\right)\left(t-2\right)\left(t+\left(t-3\right)\right) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{t=1} \quad\vee\quad \underline{t=2} \quad\vee\quad \underline{t=\tfrac{3}{2}}$$

De tilhørende punktene blir:

$$t=1:\qquad x = -1^3 + 3\cdot 1^2 = \underline{\underline{2}}\,,\qquad y = 1^3 - 6\cdot 1^2 + 9\cdot 1 = \underline{\underline{4}}\,.$$

$$t=2:\qquad x = -2^3 + 3\cdot 2^2 = \underline{\underline{4}}\,,\qquad y = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 = \underline{\underline{2}}\,.$$

$$t=\tfrac{3}{2}:\qquad x = -\left(\tfrac{3}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\tfrac{27}{8}}}\,,\qquad y = \left(\tfrac{3}{2}\right)^3 - 6\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 9\cdot\tfrac{3}{2} = \underline{\underline{\tfrac{27}{8}}}\,.$$