

11. Termodynamikk.

Den industrielle revolusjonen startet med at man klarte å omforme varme til arbeid. I dette kapitlet skal vi først sette opp termodynamikkens 1. lov, som gir sammenhengen mellom varme, arbeid og indre energi. Deretter skal vi se nærmere på noen termodynamiske prosesser og sette dem sammen til de sykliske prosessene som vi finner i alle varmekraftmaskiner, enten det er dampmaskiner eller forbrenningsmotorer. Vi skal også ta en titt på kjølemaskiner.

Under veis får vi kunnskap om stoffenes "indre liv", og hva som utgjør stoffenes indre energi. Vi skal sette opp modeller for varmekapasitetene til stoffer, først og fremst for ideelle gasser, og se at våre modeller fører til resultater som stemmer imponerende bra med eksperimentelle resultater. Under dette arbeidet blir det noen "løse tråder". Men vi skal nok klare å samle disse trådene til en helhet etter hvert.

Til slutt skal vi se på termodynamikkens 2. hovedsetning, som gir retningslinjer for hvilken vei prosesser kan gå.

11.1. Indre energi.

Vi postulerer at stoffer må ha en indre energi knyttet til atomer og molekyler.

11.2. Arbeid ved volumforandring.

Vi utleder en svært viktig formel.

11.3. Termodynamikkens 1. lov.

Dette er "grunnloven" om energibevaring i termodynamiske prosesser.

11.4. Noen vanlige termodynamiske prosesser.

11.4.1. Isokor prosess.

11.4.2. Isobar prosess.

11.4.3. Isoterm prosess.

11.4.4. Adiabatisk prosess.

11.5. Mer om ideelle gasser.

Vi ser nærmere på hvordan ideelle gasser er bygd opp, og bruker våre antakelser til å sette opp en viktig sammenheng mellom molekylens kinetiske energi og temperatur.

11.5.1. Litt kinetisk gassteori. Vi bruker prinsipper fra mekanikken til å finne et uttrykk for trykket i en ideell gass.

11.5.2. Indre energi for en ideell gass. Nå trekker vi inn tilstandslikningen for en ideell gass, og finner sammenhengen mellom kinetisk energi og temperatur.

11.6. Isoterm prosess for en ideell gass.

Vi går litt i detalj for en viktig prosess.

11.7. Molare varmekapasiteter for en ideell gass.

Vi setter opp uttrykk for varmekapasiteter som er nyttige i praktisk bruk, og som også bekrefter at våre antakelser om gassers oppbygging og egenskaper er korrekte.

11.7.1. Isokore og isobare prosesser. Her dannes grunnlaget.

11.7.2. Adibatkonstanten.

11.7.3. Noen eksperimentelle resultater. Stemmer teoriene våre?

*11.7.4. Ekvipartisjonsprinsippet. Vi ser litt på andre stoffer enn ideelle gasser.

11.8. Adiabatisk prosess for en ideell gass. Dette er vanlige prosesser, som krever nye likninger i tillegg til den vanlige tilstandslikningen.

11.9. Sykliske prosesser.

Nå skal vi benytte våre kunnskaper på idealiserte prosesser for varmekraft- og kjøle-maskiner. Viktig stoff!

11.10. Termodynamikkens andre lov.

Hva er det som bestemmer hvilken vei en prosess kan gå?

11.10.1. Reversible og irreversible prosesser. Kan prosesser gå begge veier?

11.10.2. Termodynamikkens 2. lov. Endelig er vi i stand til å sette opp våre første formuleringer av denne viktige (men ulne) loven.

11.11. Reversible og irreversible sykliske prosesser.

Vi setter opp teoretiske grenser for ytelsene til varmekraftmaskiner.

11.11.1. Optimal virkningsgrad.

11.11.2. Carnot-syklusen. En milepel i studiet av termodynamiske prosesser.

*11.11.3. Den termodynamiske temperaturskalaen.

11.12. Entropi.

En størrelse som bl.a. kan brukes til å formulere termodynamikkens 2. lov.

*11.13. Tillegg.

11.13.1. Trykket i en ideell gass. En forenklet framstilling av kinetisk gassteori.

11.13.2. Tilstandslikningen for en ideell gass ved en adiabatisk prosess.

11.13.3. Otto-syklusen. En forenklet framstilling av syklusen i en bensinmotor.

11.14. Sammendrag.

11.15. Oppgaver.

11.15.1. Småoppgaver i teksten.

11.15.2. Blandede oppgaver.

11.15.3. Løsning på småoppgavene.

11.15.4. Svar på blandede oppgaver.

11.1. Indre energi.

Allerede før man begynte å forstå hvordan stoffer er bygd opp av atomer og molekyler, fant man ut at stoffer måtte ha en *indre energi*. Vi har allerede sett at gasser kan oppfattes som små partikler som fyker omkring, og som derfor må ha en kinetisk energi. Større gasmolekyler kan også ha energi knyttet til rotasjon og vibrasjon.

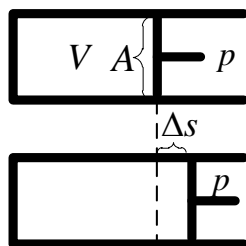
Vi har tidligere sett at når vi varmer opp et legeme, og legemet ikke smelter eller fordampes, vil temperaturen i legemet øke. Faste stoffer, spesielt i krystallform, kan ha energi knyttet til bindinger mellom atomer eller molekyler. Smelting og fordamping medfører endring av molekylstrukturen. Det er derfor naturlig å anta at alle stoffer har en indre energi som kun avhenger av den *tilstanden* som stoffet er i. Med *tilstand* mener vi om stoffet er i fast form, væske- eller gassform, samt trykk og temperatur. For en gass kan også volumet ha betydning.

Vi definerer ikke noe nullpunkt for den indre energien. Dette betyr at vi kun regner med *endringer* i indre energi. Vi summerer opp:

Ethvert stoff har en indre energi U som kun avhenger av stoffets tilstand. Vi regner kun med endringer ΔU i indre energi når tilstanden endrer seg.

11.2. Arbeid ved volumforandring.

En gass er innestengt i en sylinder med et stempel som kan gli uten friksjon. Volumet av gassen er V , og trykket i og utenfor gassen er p . Så varmer vi opp gassen, som utvider seg og skyver stempelet en kort strekning Δs . Gassen må da gjøre et arbeid mot trykk-kreftene.



Dersom tverrsnittsarealet av stempelet er A , blir dette arbeidet

$$\Delta W = F \cdot \Delta s = (p \cdot A) \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V .$$

Her har jeg benyttet at

$$p = \frac{F}{A} \Leftrightarrow F = p \cdot A$$

og at

$$\Delta V = A \cdot \Delta s .$$

Dersom trykket ikke er konstant over hele strekningen, eller arealet A varierer, kan vi dele opp strekningen i små biter med lengde ds og anta at trykket og arealet holdes konstant innenfor en slik liten bit. Det samlede arbeidet blir da summen av alle bidragene innenfor disse små bitene. Dette finner vi ved integrasjon:

$$W = \int F \cdot ds = \int p \cdot A \cdot ds = \int p \cdot dV$$

Vi må integrere fra en start-tilstand der volumet er V_1 til en slutt-tilstand der volumet er V_2 .

Dette er et svært viktig resultat som vi rammer inn:

Når en gass med trykk p endrer volum fra V_1 til V_2 , så utfører gassen et arbeid på omgivelsene gitt ved

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

Eksempel 11.2.1: Vi har 0.70 m^3 av en ideell gass som varmes opp fra 7°C til 67°C mens trykket er konstant på $1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Hvor stort arbeid utfører gassen på omgivelsene under denne oppvarmingen?

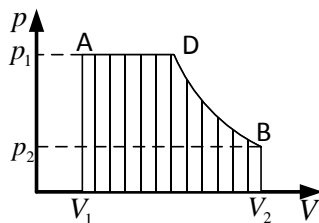
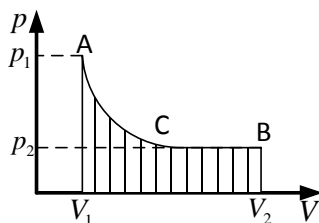
Løsning: Vi må først finne volumet etter oppvarmingen:

$$\frac{pV_2}{T_2} = \frac{pV_1}{T_1} \Leftrightarrow V_2 = V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 0.70 \text{ m}^3 \cdot \frac{(273 + 67) \text{ K}}{(273 + 7) \text{ K}} = \underline{0.85 \text{ m}^3} .$$

Siden trykket er konstant, blir arbeidet

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \cdot \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot (0.85 - 0.70) \text{ m}^3 = \underline{1.5 \cdot 10^4 \text{ J}} .$$

Selv om vi har formulert utledningen og setningen ved hjelp av en gass, gjelder resonnetet og resultatet for alle systemer uansett fase, så lenge massen (antall molekyler) ikke endres. For eksempel må det utføres et arbeid når vann fordampes, fordi dampen opptar mye større volum enn vannet.

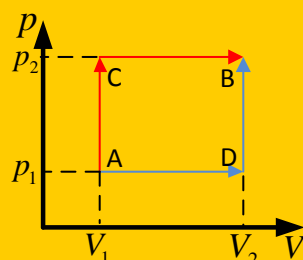


Figurene til venstre viser et system som går på to måter fra en tilstand A der volumet er V_1 og trykket p_1 til en ny tilstand B der volumet er V_2 og trykket p_2 . Det arbeidet som systemet utfører på omgivelsene, er

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV ,$$

som er det skraverte arealet under grafene. Men vi ser at dette arbeidet er forskjellig i de to prosessene til tross for at både start- og slutt-tilstanden er lik i begge. Dette illustrerer at **arbeidet avhenger ikke bare av start- og slutt-tilstandene, men avhenger også av hvordan tilstandene er underveis.**

Eksempel 11.2.2:



En gass kan føres fra tilstand A til tilstand B på to måter, enten via C eller via D. Du vet at:

$$V_A = V_1 = 3.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, \quad V_B = V_2 = 8.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$p_A = p_1 = 8.0 \cdot 10^4 \text{ Pa}, \quad p_B = p_2 = 20.0 \cdot 10^4 \text{ Pa} .$$

Hvor stort arbeid utfører gassen på omgivelsene

- når gassen føres fra A til B via C.
- når gassen føres fra A til B via D.

Løsning:

- a) På strekningen AC er volumet konstant. Da utføres det ikke noe arbeid. Det totale arbeidet er derfor arbeidet på strekningen CB. Siden trykket er konstant på denne strekningen, blir

$$\begin{aligned}W_{ACB} &= 0\text{J} + W_{CB} = \int_{V_1}^{V_2} p_2 dV = p_2 (V_2 - V_1) \\ &= 20.0 \cdot 10^4 \text{ Pa} \cdot (8.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 - 3.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) = \underline{\underline{1000\text{J}}}\end{aligned}$$

- a) På strekningen DB er volumet konstant. Da utføres det ikke noe arbeid. Det totale arbeidet er derfor arbeidet på strekningen AD. Siden trykket er konstant på denne strekningen, blir

$$\begin{aligned}W_{ADB} &= W_{AD} + 0\text{J} = \int_{V_1}^{V_2} p_1 dV = p_1 (V_2 - V_1) \\ &= 8.0 \cdot 10^4 \text{ Pa} \cdot (8.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 - 3.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) = \underline{\underline{400\text{J}}}\end{aligned}$$

Vi skal gå videre med dette eksemplet i Eksempel 11.3.1.

11.3. Termodynamikkens 1. lov.

Et system kan utveksle energi med et annet system eller med omgivelsene på to måter:

1. Systemet kan avgi eller få tilført varme. Denne energioverføringen skyldes temperaturforskjellen mellom de to systemene.
2. Systemet kan utføre mekanisk arbeid, eller et mekanisk arbeid kan bli utført på systemet.

En prosess som innebærer en slik energioverføring skal vi kalle en *termodynamisk prosess*.

I mange termodynamiske prosesser vil begge typene energioverføring være til stede. For å holde rede på energien definerer vi:

- Q (eller ΔQ) bruker vi som symbol for energi som overføres i form av varme.
- W bruker vi som symbol for energi som overføres i form av arbeid.

Vi definerer disse fortegnreglene:

- Q er *positiv* dersom vårt *system tilføres* energi i form av varme.
- W er *positiv* dersom vårt *system utfører* arbeid på omgivelsene.

Merk at fortegnregelen for W ikke benyttes av alle lærebøker. Internasjonal standard sier faktisk at W skal være positiv dersom vårt system *tilføres* energi fra omgivelsene i form av arbeid, altså motsatt av vår fortegnregel. Men ingeniører er mest interessert i det arbeidet som et system kan *utføre*. Vår regel følger derfor gamle tradisjoner innen teknisk varmelære.

Vi har nettopp sett at et system kan utveksle energi med omgivelsene i form av arbeid, og at denne energien er gitt ved

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

Det generelle energiprinsippet sier at energi verken kan skapes eller forsvinne, bare omformes til andre energiformer. Det er derfor rimelig å anta at når et system mottar energi i form av en varmemengde ΔQ , kan denne energien dels gå med til å øke systemets indre energi med en størrelse ΔU og dels gå med til å la systemet utføre et arbeid W . Da får vi:

Termodynamikkens første lov:

Dersom et system mottar en varmemengde ΔQ , er

$$\Delta Q = \Delta U + W$$

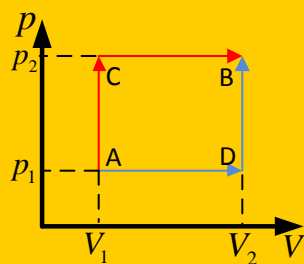
der ΔU er økingen i systemets indre energi og W er det arbeidet som systemet utfører på omgivelsene.

Vi har allerede antatt at den indre energien kun avhenger av stoffets tilstand. Men vi har også sett at det arbeidet som systemer utfører ikke bare avhenger av start- og slutt-tilstandene. Da kan heller ikke den tilførte varmen gjøre det dersom termodynamikkens 1. lov skal gjelde. Vi må altså slå fast at:

Når et system går fra en termodynamisk tilstand til en annen, er endringen av indre energi bare avhengig av start- og slutt-tilstanden, uavhengig av hvordan systemet går fra start- til slutt-tilstanden. Vi sier at indre energi er en *tilstandsvariabel*.

Tilført varme ΔQ og utført arbeid W er *ikke* tilstandsvariabler.

Eksempel 11.3.1:



Vi skal gå videre med eksempel 11.2.2, der en gass ble ført fra tilstand A til tilstand B på to måter, via C eller via D. Dersom prosessen går via C, tilføres systemet en varme $\Delta Q_{ACB} = 800\text{ J}$. Hvor mye varme må systemet tilføres dersom det går via tilstand D når du benytter at:

$$W_{ACB} = 1000\text{ J}, \quad W_{ADB} = 400\text{ J}$$

Løsning: Vi vet at endringen i indre energi er uavhengig av hvilken prosess som brukes. Da er

$$\Delta U = \Delta Q_{ACB} - W_{ACB} = \Delta Q_{ADB} - W_{ADB}$$

$$\Delta Q_{ADB} = \Delta Q_{ACB} - W_{ACB} + W_{ADB} = 800\text{ J} - 1000\text{ J} + 400\text{ J} = \underline{\underline{200\text{ J}}}$$

Eksempel 11.3.2: Vis at 1.00 kg vann (H_2O) tilsvarer 55.5 mol vann, og bruk dette til å finne hvor mye den indre energien i 1.00 kg vann øker når vannet fordamper ved 100°C og atmosfæretrykk. Anta at vanndampen følger tilstandslikningen for en ideell gass. Spesifikk fordampingsvarme for vann er $2.26 \cdot 10^6\text{ J/kg}$. Atom-massen for H er $1.01u$, og for O er atommassen $16.00u$.

Løsning: Vann har kjemisk formel H_2O . Den molare massen til vann blir da

$M = 2 \cdot 1.01 + 16.00 = 18.02$,
slik at antall mol i ett kg vann er

$$n = \frac{1.00 \text{ kg}}{18.02 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} = \underline{\underline{55.5}}.$$

Ved fordamping tilføres vannet en energi

$$\Delta Q = l \cdot m = 2.26 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \cdot 1.00 \text{ kg} = \underline{\underline{2.26 \cdot 10^6 \text{ J}}}.$$

Volumet av 1.00 kg vanndamp er:

$$pV = nRT \Leftrightarrow V = \frac{nRT}{p} = \frac{55.5 \cdot 8.31 \text{ J/K} \cdot 373 \text{ K}}{1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = \underline{\underline{1.70 \text{ m}^3}}.$$

Volumet av det samme vannet i flytende form er $1.00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Under fordampingen utføres derfor et arbeid

$$W = p \cdot \Delta V = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot (1.70 - 0.001) \text{ m}^3 = \underline{\underline{1.72 \cdot 10^5 \text{ J}}}.$$

Økingen i indre energi blir da

$$\Delta U = \Delta Q - W = 2.26 \cdot 10^6 \text{ J} - 1.72 \cdot 10^5 \text{ J} = \underline{\underline{2.09 \cdot 10^6 \text{ J}}}.$$

Oppgave: [11.3.1.](#)

11.4. Noen vanlige termodynamiske prosesser.

Noen termodynamiske prosesser er så vanlige at de har fått egne navn. Vi skal nå se på noen slike, og skal samtidig se på noen viktige egenskaper ved disse prosessene.

11.4.1. Isokor prosess.

En *isokor prosess* er en prosess der *volumet er konstant*.

Av definisjonen på arbeid og termodynamikkens første lov følger da direkte:

Ved en *isokor* prosess er volumet V konstant, slik at arbeidet $W = 0$.

Da er

$$\Delta U = \Delta Q.$$

11.4.2. Isobar prosess.

En *isobar prosess* er en prosess der *trykket er konstant*.

Av definisjonen på arbeid følger da direkte:

Ved en *isobar* prosess er trykket p konstant, slik at arbeidet

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = p \cdot \Delta V .$$

11.4.3. Isoterm prosess.

En *isoterm prosess* er en prosess der *temperaturen er konstant*.

Generelt vil både W , ΔQ og ΔU være forskjellig fra null under en slik prosess. Dersom for eksempel vann ved 100°C fordampes til gass (damp) ved 100°C under konstant trykk, har vi en isoterm prosess der det tilføres varme samtidig som det utføres arbeid slik vi så i Eksempel 11.3.2.

11.4.4. Adiabatisk prosess.

En *adiabatisk prosess* er en prosess der det *ikke er varmeutveksling*.

Da har vi at:

Ved en adiabatisk prosess er

$$\Delta Q = 0 \Leftrightarrow \Delta U = -W .$$

Prosesser som er tilnærmet adiabatisk er faktisk svært vanlige. Prosesser som foregår så raskt at det ikke er tid til å overføre varme er jo tilnærmet adiabatisk. Her er et par eksempler:

- Når stempelen presser sammen gassen i en sylinder i en bensin- eller dieselmotor tilføres gassen arbeid så raskt at det ikke er tid til varmetap ut av sylindren. Da er W negativ, slik at ΔU blir positiv og temperaturen i gassen øker mye.
- Et kjøle- eller fryseanlegg fungerer ved at gass tillates å ekspandere svært raskt. Da utfører gassen et arbeid på omgivelsene. W er positiv, og ΔU blir negativ slik at temperaturen i gassen synker.

11.5. Mer om ideelle gasser.

11.5.1. Litt kinetisk gassteori.

Vi har allerede nevnt at en ideell gass kan oppfattes som en samling partikler som beveger seg i en beholder. Når en slik partikkel treffer veggen i beholderen, virker det støtkrefter mellom veggen og beholderen. Bortsett fra disse støtkreftene skal vi se bort fra alle andre krefter som virker på partiklene.

Trykket i gassen (mer presist: trykket fra gassen på veggene i beholderen) kan da oppfattes som en samlet virkning av alle støtkreftene fra partikler som støter mot veggene. Med dette som utgangspunkt kan vi benytte lover og prinsipper fra mekanikken for å beregne disse støtkreftene, og dermed også finne uttrykk for trykket. En fullgod utledning blir temmelig kronglet, men i [tillegget](#) finner du en forenklet utledning, som ender opp med at:

Vi har N molekyler i en beholder med volum V . Dersom alle molekylene har samme masse m og samme fart v , er trykket i beholderen

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot \left(\frac{1}{2}mv^2\right) \Leftrightarrow p \cdot V = \frac{2}{3}N \cdot \left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

Her innser vi at $\frac{N}{V}$ er antall molekyler pr volumenhet, eller molekyltettheten. Uttrykket i parenteser kjenner vi igjen som den kinetiske energien W_k til hver partikkel. Den samlede kinetiske energien til alle de N partiklene blir da

$$E_k = N \cdot W_k = N \cdot \left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

I praksis vil ikke alle partiklene ha samme fart. Men vi kan vise at uttrykket for kinetisk energi likevel blir riktig dersom vi oppfatter v^2 som *gjennomsnittet* av kvadratet av farten til alle partiklene. Da kan vi summere opp resultatene slik:

Vi har N partikler i en beholder med volum V . Den gjennomsnittlige kinetiske energien til en partikkel er $W_k = \frac{1}{2}mv^2$ slik at den totale kinetiske energien til alle partiklene i gassen er

$$E_k = N \cdot W_k.$$

Da er trykket p i gassen gitt ved

$$p \cdot V = \frac{2}{3}E_k = \frac{2}{3}N \cdot W_k.$$

11.5.2. Indre energi for en ideell gass.

De resultatene som vi kom fram til ovenfor, forutsetter at gassen består av svært små molekyler som alle har samme masse m . Vi har også sett bort fra alle andre krefter enn støtkreftene mellom gassmolekylene og veggen i beholderen. Videre har vi sagt at den kinetiske energien kun skyldes *translasjon*. Vi har sett bort fra rotasjon og vibrasjon.

Det er rimelig å tro at enatomige gasser under svært lavt trykk tilfredsstiller disse kravene. Slike gasser har vi tidligere betraktet som ideelle gasser, og vi har vist at de følger

tilstandslikningen for en ideell gass:

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T.$$

Ved å sammenlikne dette med resultatet fra den kinetiske gassteorien:

$$p \cdot V = \frac{2}{3} E_k = \frac{2}{3} N \cdot W_k$$

ser vi at

$$\frac{2}{3} N \cdot W_k = N \cdot k \cdot T \quad \Leftrightarrow \quad W_k = \frac{3}{2} kT.$$

Vi har altså klart å finne en sammenheng mellom temperaturen T og den gjennomsnittlige kinetiske energien W_k for ett molekyl i gassen. Nå skal vi sette opp en dristig hypotese:

For en ideell, enatomig gass er det kun molekylenes kinetiske energi som utgjør gassens indre energi.

Dersom den hypotesen holder, kan vi skrive

$$U = N \cdot W_k = N \cdot \left(\frac{3}{2} kT\right) = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} nRT.$$

Vi er mest interessert i endringer i indre energi. Dersom vi har en avgrenset gasmengde slik at antall molekyler N (og antall mol n) er konstant, er det bare temperaturen T som kan variere. Da får vi:

For en ideell, enatomig gass er endringen i indre energi gitt ved

$$\Delta U = \frac{3}{2} Nk \cdot \Delta T = \frac{3}{2} nR \cdot \Delta T$$

Vi har tidligere sagt at den indre energien kun avhenger av *tilstanden*. Dersom våre antakelser er riktige, kan vi nå være enda mer presis for ideelle gasser:

Den indre energien i en ideell gass avhenger kun av *temperaturen*.

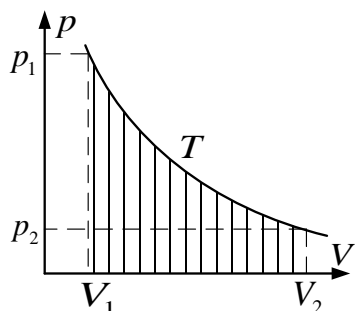
Vi har egentlig bare sett på enatomige gasser, og har antatt at den kinetiske energien kun skyldes translasjon. Men gassmolekyler som er bygd opp av to eller flere atomer, kan i tillegg ha kinetisk energi fordi molekylene roterer eller på grunn av vibrasjoner. Vi skal imidlertid anta at også slike energiformer kun avhenger av temperaturen. Dessuten skal vi anta at når vi summerer opp alle slike energiformer, får vi gassens indre energi.

Disse resultatene er egentlig ganske imponerende. Ved å benytte vår modell for en ideell gass, og anvende formler og prinsipper fra mekanikken, har vi klart å finne en enkel sammenheng mellom gassens temperatur og den kinetiske energien til partiklene i gassen. Vi har benyttet denne sammenheng (samt hypoteser om den indre energien) til å finne et uttrykk for endring av den indre energien.

Men en viktig test gjenstår: Kan vi verifisere disse resultatene eksperimentelt? Vi skal se nærmere på dette spørsmålet i kap. 11.7.

Oppgave: [11.5.1.](#)

11.6. Isoterm prosess for en ideell gass.



En isoterm prosess for en *ideell gass* kan illustreres i et pV -diagram som vist til venstre. Ved å benytte at

$$pV = nRT \Leftrightarrow p = \frac{nRT}{V}$$

får vi at arbeidet som utføres er

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV \stackrel{\text{Konstant } T}{=} nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \\ &= nRT [\ln V]_{V_1}^{V_2} = nRT (\ln V_2 - \ln V_1) = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \end{aligned}$$

Dessuten vet vi at for en ideell gass er den indre energien kun avhengig av temperaturen. Når temperaturen ikke endres, er den indre energien konstant. Vi summerer opp:

Når en *ideell gass* utvides *isotermt* fra et volum V_1 til V_2 gjelder:

$$\Delta U = 0.$$

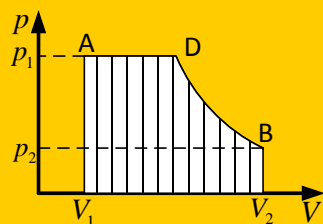
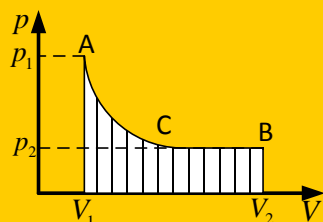
$$\Delta Q = W = nRT \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Dette uttrykket kan omformes på mange måter. Vi kan for eksempel erstatte nRT med p_1V_1 eller med p_2V_2 . Vi kan også benytte at

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{nRT}{p_2}}{\frac{nRT}{p_1}} = \frac{p_1}{p_2},$$

og benytte den varianten som gir enklest regninger.

Eksempel 11.2.2:



I figurene til venstre er tilstand A gitt ved $p_A = 1.5 \cdot 10^5$ Pa og $V_A = 0.10 \text{ m}^3$, mens tilstand B er gitt ved $p_B = 1.0 \cdot 10^5$ Pa og $V_B = 0.30 \text{ m}^3$. Anta at vi har en ideell gass, og beregn hvor stort arbeid gassen utfører på omgivelsene når:

- Gassen føres først fra A til C under konstant temperatur, og deretter fra C til B under konstant trykk.
- Gassen føres først fra A til D under konstant trykk, og deretter fra D til B under konstant temperatur.

Løsning:

- a) Finner først volumet i tilstand C, og benytter at $p_C = p_B = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ mens temperaturen er konstant fra A til C:

$$\frac{p_C V_C}{T} = \frac{p_A V_A}{T} \Leftrightarrow V_C = V_A \cdot \frac{p_A}{p_C} = 0.10 \text{ m}^3 \cdot \frac{1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = \underline{0.15 \text{ m}^3}.$$

På strekningen fra A til C er ikke trykket konstant. Men temperaturen er konstant. Da kan vi finne trykket p som funksjon av volumet V ved å benytte tilstandslikningen for en ideell gass:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_A V_A}{T} \Leftrightarrow p = \frac{p_A V_A}{V} = \frac{1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 0.10 \text{ m}^3}{V} = \frac{1.5 \cdot 10^4 \text{ J}}{V}.$$

Her har jeg benyttet at $\text{Pa} \cdot \text{m}^3 = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^3 = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$.

Nå kan vi finne arbeidet fra A til C:

$$\begin{aligned} W_{AC} &= \int_{V_A}^{V_C} p dV = \int_{V_A}^{V_C} \frac{1.5 \cdot 10^4 \text{ J}}{V} dV = 1.5 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \int_{V_A}^{V_C} \frac{1}{V} dV = 1.5 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot [\ln V]_{V_A}^{V_C} \\ &= 1.5 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot (\ln V_C - \ln V_A) = 1.5 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \ln \left(\frac{V_C}{V_A} \right) = 1.5 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \ln \left(\frac{0.15 \text{ m}^3}{0.10 \text{ m}^3} \right) \\ &\approx \underline{0.61 \cdot 10^4 \text{ J}} \end{aligned}$$

Det totale arbeidet blir da

$$\begin{aligned} W &= W_{AC} + p_B \cdot \int_{V_C}^{V_B} dV = 0.61 \cdot 10^4 \text{ J} + p_B \cdot (V_B - V_C) \\ &= 0.61 \cdot 10^4 \text{ J} + 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot (0.30 - 0.15) \text{ m}^3 = \underline{\underline{2.11 \cdot 10^4 \text{ J}}} \end{aligned}$$

- b) Finner først volumet i tilstand D, og benytter at $p_D = p_A = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ mens temperaturen er konstant fra D til B:

$$\frac{p_D V_D}{T} = \frac{p_B V_B}{T} \Leftrightarrow V_D = V_B \cdot \frac{p_B}{p_D} = 0.30 \text{ m}^3 \cdot \frac{1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = \underline{0.20 \text{ m}^3}.$$

På samme måte som før finner vi trykket fra D til B som funksjon av volumet V :

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_B V_B}{T} \Leftrightarrow p = \frac{p_B V_B}{V} = \frac{1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 0.30 \text{ m}^3}{V} = \frac{3.0 \cdot 10^4 \text{ J}}{V}.$$

Nå kan vi finne arbeidet fra D til B:

$$\begin{aligned} W_{DB} &= \int_{V_D}^{V_B} p dV = \int_{V_D}^{V_B} \frac{3.0 \cdot 10^4 \text{ J}}{V} dV = 3.0 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \ln \left(\frac{V_B}{V_D} \right) = 3.0 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \ln \left(\frac{0.30 \text{ m}^3}{0.20 \text{ m}^3} \right) \\ &\approx \underline{1.2 \cdot 10^4 \text{ J}} \end{aligned}$$

Det totale arbeidet blir da

$$\begin{aligned} W &= p_A \cdot \int_{V_A}^{V_D} dV + W_{DB} = p_A \cdot (V_D - V_A) + 1.2 \cdot 10^4 \text{ J} \\ &= 1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot (0.20 - 0.10) \text{ m}^3 + 1.2 \cdot 10^4 \text{ J} = \underline{\underline{2.7 \cdot 10^4 \text{ J}}} \end{aligned}$$

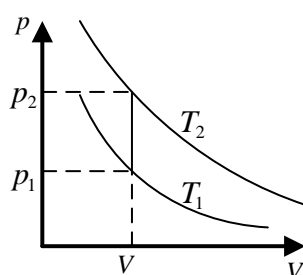
11.7. Molare varmekapasiteter for ideelle gasser.

11.7.1. Isokore og isobare prosesser .

For faste stoffer og væsker var den spesifikke varmekapasiteten en nyttig størrelse. For gasser, og spesielt for ideelle gasser, er den **molare** varmekapasiteten nyttigere. Vi definerer den slik:

Dersom en varmemengde ΔQ tilføres n mol av et stoff, og temperaturøkningen er ΔT , så er stoffets **molare varmekapasitet**

$$c = \frac{\Delta Q}{n \cdot \Delta T} = \frac{\Delta U + W}{n \cdot \Delta T}.$$



Vi husker at for en isokor prosess er volumet konstant slik figuren til venstre viser. Da utføres det heller ikke noe arbeid slik at $W = 0$. Vi bruker symbolet c_V for den molare varmekapasiteten ved konstant volum, og ΔQ_V for tilført varme, og får

$$c_V = \frac{\Delta Q_V}{n \cdot \Delta T} = \frac{\Delta U}{n \cdot \Delta T}.$$

Vi har allerede postulert at den indre energien for en ideell gass kun avhenger av *temperaturen*. Endringer av den indre energien avhenger da kun av start- og slutttemperaturen, uavhengig av om prosessen er isokor eller ikke. Dermed har vi at:

Endringen ΔU i den indre energien i en ideell gass er alltid gitt ved

$$\Delta U = \Delta Q_V = c_V \cdot n \cdot \Delta T$$

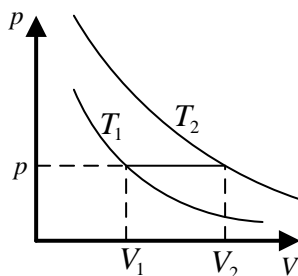
uavhengig av hvordan prosessen foregår.

Vi har tidligere kommet fram til at for en ideell, *enatomig* gass er endringen i indre energi

$$\Delta U = \frac{3}{2} Nk \cdot \Delta T = \frac{3}{2} nR \cdot \Delta T.$$

Vi setter disse to uttrykkene for ΔU lik hverandre, og får

$$\Delta U = c_V \cdot n \cdot \Delta T = \frac{3}{2} nR \cdot \Delta T \Leftrightarrow c_V = \underline{\underline{\frac{3}{2} R}}.$$



Figuren til venstre viser pV -diagrammet for en ideell gass som utvides mens *trykket* p holdes konstant (isobar prosess). Da blir arbeidet

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B p dV = p \cdot \int_A^B dV = p \cdot (V_B - V_A) \\ &= p \cdot V_B - p \cdot V_A = nRT_B - nRT_A = nR \cdot \Delta T \end{aligned}$$

Når den isobare prosessen fører til at temperaturen endres med ΔT , er endringen i indre energi fremdeles gitt ved $\Delta U = c_v \cdot n \cdot \Delta T$. Da blir den molare varmekapasiteten når en ideell gass endrer volum mens trykket er konstant

$$c_p = \frac{\Delta U + W}{n \cdot \Delta T} = \frac{c_v n \cdot \Delta T + nR \cdot \Delta T}{n \cdot \Delta T} = \underline{\underline{c_v + R}},$$

der c_p står for molar varmekapasitet når trykket er konstant.

For en ideell *enatomig* gass vet vi at $c_v = \frac{3}{2}R$. Da blir

$$c_p = \frac{3}{2}R + R = \underline{\underline{\frac{5}{2}R}}.$$

En rask oppsummering:

For *enhver* ideell gass er

$$c_p = c_v + R.$$

For ideelle, *enatomige* gasser er

$$c_v = \frac{3}{2}R, \quad c_p = \frac{5}{2}R.$$

Oppgaver: [11.7.1](#), [11.7.2](#).

11.7.2. Adiabatkonstanten.

Vi skal nå definere en størrelse som kalles *adiabatkonstanten*:

$$\text{Adiabatkonstanten } \gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

For en ideell, *enatomig* gass er $c_p = \frac{5}{2}R$ og $c_v = \frac{3}{2}R$. Da blir

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3}.$$

Vi vet at for enhver *ideell* gass (som ikke trenger å være enatomig) er

$$c_p = c_v + R.$$

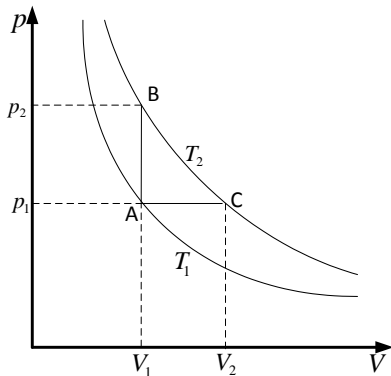
Da blir

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} \Leftrightarrow \frac{R}{c_v} = \gamma - 1 \Leftrightarrow c_v = \underline{\underline{\frac{R}{\gamma - 1}}}.$$

Videre blir

$$c_p = \gamma c_v = \underline{\underline{\frac{\gamma R}{\gamma - 1}}}.$$

For reelle gasser finner vi eksperimentelle verdier for γ i tabeller. Vi ser at når vi kjenner γ , og antar at gassen kan oppfattes som ideell, kan vi finne både c_p og c_v . Da kan vi også beregne ΔU og ΔQ ved en isokor og en isobar prosess som vist nedenfor.



For den *isokore* prosessen (konstant volum $V = V_1$) fra A til B er

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta Q_V = c_v \cdot n \cdot \Delta T = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot n \cdot (T_2 - T_1) \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} (nRT_2 - nRT_1) = \frac{1}{\gamma - 1} (p_2 V - p_1 V) \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} (p_2 - p_1) V\end{aligned}$$

For den *isobare* prosessen (konstant trykk $p = p_1$) fra A til C er endringen i indre energi lik endringen i indre energi når vi går fra A til B fordi B og C har samme temperatur. Da får vi:

$$\begin{aligned}\Delta U &= c_v \cdot n \cdot \Delta T = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot n \cdot (T_2 - T_1) = \frac{1}{\gamma - 1} (nRT_2 - nRT_1) \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} (pV_2 - pV_1) = \frac{1}{\gamma - 1} p(V_2 - V_1)\end{aligned}$$

Videre er

$$\Delta Q_p = c_p \cdot n \cdot \Delta T = \gamma c_v \cdot n \cdot \Delta T = \gamma \cdot \Delta U = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot p \cdot (V_2 - V_1).$$

Eksempel 11.7.1: Vi skal nå anta at luft kan betraktes som en ideell gass med adiabatkonstant $\gamma = 1.40$. Vi har 0.50 m^3 luft innestengt i en beholder der temperaturen er 17°C og trykket er $1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Hvor mye varme må tilføres for å varme opp denne gassen til 92°C

- når volumet holdes konstant?
- når trykket holdes konstant?

Løsning: Bruker indeks 0 for å markere start-tilstanden.

- a) Finner først det nye trykket p_1 :

$$\frac{p_1 V_0}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \Leftrightarrow p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0} = 1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \frac{(273 + 92) \text{ K}}{(273 + 17) \text{ K}} = \underline{1.26 \cdot 10^5 \text{ Pa}}.$$

Tilført varme blir da

$$\Delta Q_V = \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 - p_0) V_0 = \frac{1}{1.40 - 1} (1.26 - 1.00) \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 0.50 \text{ m}^3 = \underline{\underline{32.5 \cdot 10^3 \text{ J}}}$$

- b) Finner først det nye volumet V_1 :

$$\frac{p_0 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \Leftrightarrow V_1 = V_0 \frac{T_1}{T_0} = 0.50 \text{ m}^3 \cdot \frac{(273 + 92) \text{ K}}{(273 + 17) \text{ K}} = \underline{0.63 \text{ m}^3}.$$

Tilført varme blir da

$$\Delta Q_p = \frac{\gamma}{\gamma-1}(V_1 - V_0)p_0 = \frac{1.40}{1.40-1}(0.63 - 0.50)\text{m}^3 \cdot 1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa} = \underline{\underline{45.5 \cdot 10^3 \text{ J}}}$$

Eller enklere, der jeg benytter at jeg allerede har funnet ΔQ_V :

$$\Delta Q_p = c_p \cdot n \cdot \Delta T = (\gamma c_V) \cdot n \cdot \Delta T = \gamma \cdot \Delta Q_V = 1.40 \cdot 32.5 \cdot 10^5 \text{ J} = \underline{\underline{45.5 \cdot 10^3 \text{ J}}}.$$

11.7.3. Noen eksperimentelle resultater.

Nå er tiden inne til å sammenlikne våre beregninger med eksperimentelle data. Da husker vi at vi har funnet:

- For *enhver* ideell gass er
 $c_p = c_V + R \Leftrightarrow c_p - c_V = R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.
- For en *enatomig* ideell gass er
 $c_V = \frac{3}{2}R = \frac{3}{2} \cdot 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) = 12.47 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$,
 $c_p = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2} \cdot 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) = 20.78 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$,
 $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3} \approx 1.67$.

Her er noen eksperimentelle resultater:

Gasstype	Gass	$c_V \left(\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}\right)$	$c_p \left(\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}\right)$	$c_p - c_V \left(\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}\right)$	$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$
Enatomig	He	12.47	20.78	8.31	1.67
	Ar	12.47	20.78	8.31	1.67
Toatomig	H ₂	20.42	28.74	8.32	1.41
	N ₂	20.76	29.07	8.31	1.40
	O ₂	20.85	29.17	8.31	1.40
	CO	20.85	29.16	8.31	1.40
Fleratomig	CO ₂	28.46	36.94	8.48	1.30
	SO ₂	31.39	40.37	8.98	1.29
	H ₂ S	25.95	34.60	8.65	1.33

Av denne tabellen ser vi at:

- For de to enatomige gassene i tabellen, helium og argon, stemmer de teoretiske resultatene nærmest påfallende bra med målingene.
- For toatomige gasser ser det ut til at $c_V = \frac{5}{2}R \approx 20.78 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$, ikke $\frac{3}{2}R$ som teorien tilsier. Dessuten er $\gamma \approx 1.40 = \frac{7}{5}$, ikke $\frac{5}{3}$ som vi hadde ventet. Disse resultatene skal vi snart forklare.

- Sammenhengen

$$c_p = c_v + R \Leftrightarrow c_p - c_v = R$$

ser ut til å stemme imponerende bra. Dette bekrefter at adiabatkonstanten

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v}$$

er en viktig størrelse.

Det er i grunnen betryggende at sammenhengen $c_p = c_v + R$ er blitt bekreftet eksperimentelt.

Denne sammenhengen bygger jo på termodynamikkens 1. lov

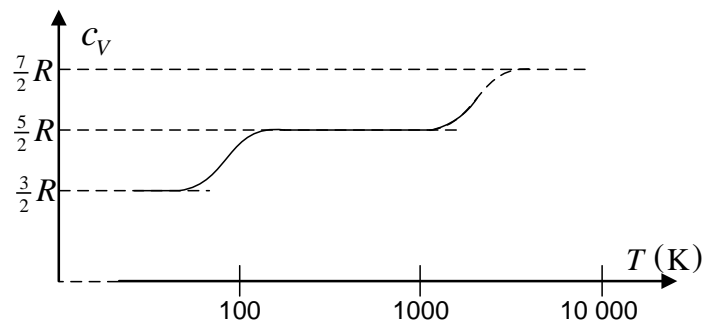
$$\Delta Q = \Delta U + W$$

kombinert med at $\Delta U = \Delta Q_v = c_v \cdot n \cdot \Delta T$, og at $W = p \cdot \Delta V = nR \cdot \Delta T$ når trykket er konstant.

Vi har fått en meget sterk indikasjon på at alle disse sammenhengene stemmer også for reelle gasser som tilnærmet kan oppfattes som ideelle.

*11.7.4. Ekvipartisjonsprinsippet.

Vi skal nå forklare hvorfor eksperimentene tyder på at $c_v = \frac{5}{2}R \approx 20.78 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ for toatomige gasser. Det viser seg nemlig at verdien av c_v for en toatomig gass avhenger av temperaturen. Målinger av c_v for H_2 som funksjon av temperaturen gir grafen nedenfor.



Dette forløpet forklarer vi slik: To- eller fleratomige molekyler kan ha *rotasjonsenergi* og *vibrasjonsenergi* i tillegg til den rene translasjonsenergien som ble benyttet i den kinetiske gasteorien for en ideell gass. Ved lave temperaturer består den kinetiske energien kun av translasjonsenergi slik teorien for ideelle gasser forutsetter. Ved temperaturer over ca. 100 K kan molekylene også få rotasjonsenergi. Og ved svært høye temperaturer kan molekylene få vibrasjonsenergi i tillegg.

For å forklare de eksakte verdiene av c_v må vi benytte resultater som delvis bygger på kvantefysikk. Vi tillegger da den translatoriske energien 3 *frihetsgrader*, fordi molekylet kan bevege seg i et 3-dimensjonalt rom. Rotasjonsenergien til et 2-atomig molekyl tillegges bare 2 frihetsgrader, fordi det kun er rotasjon om de to aksene vinkelrett på molekylets egen akse som gir bidrag til rotasjonsenergien. Rotasjon om molekylets egen akse gir neglisjerbar rotasjonsenergi. Vibrasjonsenergien tillegges også bare 2 frihetsgrader.

Så kommer vi til poenget: **Ekvipartisjonsprinsippet:**

For et system med temperatur T vil hver frihetsgrad bidra med $\frac{1}{2}kT$ til systemets indre energi.

Dermed får vi at molekyler som både har translasjons- og rotasjonsenergi vil få en indre energi $E_k = 5 \cdot \frac{1}{2}kT$, som gir

$$c_V = \frac{N \cdot \Delta E_k}{n \cdot \Delta T} = \frac{N \cdot \frac{5}{2}k \cdot \Delta T}{n \cdot \Delta T} = \frac{\frac{5}{2}nR \cdot \Delta T}{n \cdot \Delta T} = \frac{5}{2}R.$$

På tilsvarende måte får vi at

$$c_V = c_p + R = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R$$

når vi også må ta hensyn til vibrasjonsenergi. Da blir

$$\gamma = \frac{c_V}{c_p} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1.40$$

slik eksperimentene viser.

Vi kan benytte tilsvarende resonnement for et fast stoff med gitterstruktur. Da tenker vi oss at hvert molekyl er bundet til nabomolekylene med elastiske krefter. Et enatomig molekyl har tre frihetsgrader siden det kan bevege seg i tre dimensjoner, pluss tre frihetsgrader på grunn av potensiell energi i bindingene til nabomolekylene. Enatomige molekyler får derfor 6 frihetsgrader slik at den gjennomsnittlige energien pr molekyl blir

$$E = 6 \cdot \frac{1}{2}kT = \underline{3kT}.$$

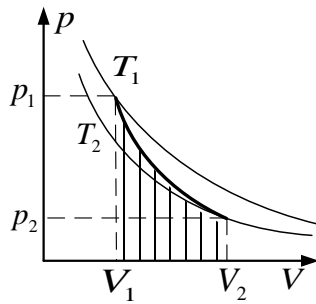
Da forventer vi at den molare varmekapasiteten til et enatomig fast stoff med krystallstruktur er

$$c = \frac{\Delta Q}{n \cdot \Delta T} = \frac{N \cdot \Delta E}{n \cdot \Delta T} = \frac{N \cdot 3k \cdot \Delta T}{n \cdot \Delta T} = \frac{3nR \cdot \Delta T}{n \cdot \Delta T} = \underline{3R} = 3 \cdot 8.314 \text{ J/K} = \underline{24.9 \text{ J/K}}.$$

Dette resultatet kalles **Dulong og Petits regel**. Den kan underbygges av noen eksperimentelle verdier i tabellen nedenfor. Merk at stoffene merket med stjerne ikke er enatomige.

Fast stoff	c (J/K)
Aluminium	24.6
Kopper	24.8
Kvikksølv	27.7
Jern	26.3
Bly	26.9
Sølv	25.3
Is	37.8*
Marmor	87.9*

11.8. Adiabatisk prosess for en ideell gass.



Vi husker at for en adiabatisk prosess er det ingen varmeutveksling med omgivelsene, slik at

$$\Delta Q = 0 \Leftrightarrow \Delta U = -W.$$

Figuren til venstre viser en adiabatisk prosess for en ideell gass. Når gassen utvides fra V_1 til V_2 , gjør den et positivt arbeid W . Da må den indre energien i gassen avta med $\Delta U = -W$. Dermed går temperaturen i gassen ned slik at vi går til en isotherm med lavere temperatur som vist i figuren.

Dersom gassen presses sammen adiabatisk fra V_2 til V_1 , må den indre energien øke slik at temperaturen øker.

Grafen til en adiabatisk prosess kalles en **adiabat**. For en ideell gass vil adiabaten alltid være brattere enn de isothermene den krysser.

I et [tillegg](#) har vi utledet en sammenheng mellom temperatur og volum under en adiabatisk prosess for en ideell gass:

$$T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1}.$$

Her er γ gassens adiabatkonstant.

Denne sammenheng kan kombineres med tilstandslikningen etter behov. Vi kan for eksempel innføre trykket p istedenfor temperaturen T . Det gjøres slik:

$$pV = nRT \Leftrightarrow T = \frac{pV}{nR}.$$

Da blir

$$T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} \Leftrightarrow \frac{p_1 V_1}{nR} \cdot V_1^{\gamma-1} = \frac{p_2 V_2}{nR} \cdot V_2^{\gamma-1} \Leftrightarrow \underline{p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma}.$$

Eller vi kan lage en likning som inneholder temperatur og trykk. Da kvitter vi oss med V :

$$pV = nRT \Leftrightarrow V = \frac{nRT}{p}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} &\Leftrightarrow T_1 \cdot \left(\frac{nRT_1}{p_1} \right)^{\gamma-1} = T_2 \cdot \left(\frac{nRT_2}{p_2} \right)^{\gamma-1} \\ &\Leftrightarrow \underline{T_1^\gamma \cdot \left(\frac{nR}{p_1} \right)^{\gamma-1} = T_2^\gamma \cdot \left(\frac{nR}{p_2} \right)^{\gamma-1}} \end{aligned}$$

Denne siste likningen blir litt penere dersom vi opphøyer begge sider i $\frac{1}{\gamma-1}$. Da får vi:

$$\underline{T_1^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \frac{nR}{p_1} = T_2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \frac{nR}{p_2}} \Leftrightarrow \underline{\frac{T_1^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_1} = \frac{T_2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_2}}.$$

For en adiabatisk prosess er $\Delta Q = 0$. Da er arbeidet

$$W = -\Delta U = -nc_v \cdot \Delta T.$$

Dette kan omformes på flere måter, for eksempel ved å benytte at

$$n \cdot T = \frac{pV}{R}$$

samt at

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

Da blir

$$W = -nc_v \cdot \Delta T = n \cdot c_v (T_1 - T_2) = c_v (nT_1 - nT_2) = \frac{R}{\gamma - 1} \left(\frac{p_1 V_1}{R} - \frac{p_2 V_2}{R} \right) = \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$$

Vi summerer opp:

Sammenhenger for ideell gass i en adiabatisk prosess:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

$$\frac{T_1^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_1} = \frac{T_2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_2}$$

$$W = -\Delta U = n \cdot c_v (T_1 - T_2) = \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$$

Eksempel 11.8.1: I et stempel i en dieselmotor komprimeres lufta til $\frac{1}{15}$ av sitt opprinnelige volum. Denne kompresjonen oppfattes som en adiabatisk prosess. Luft kan oppfattes som en ideell gass med $\gamma = 1.40$.

- Hvis det opprinnelige trykket er $1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ og den opprinnelige temperaturen er 27°C , hva blir trykket og temperaturen etter kompresjonen?
- Hvor mye arbeid utfører gassen hvis $V_1 = 10^{-3} \text{ m}^3$?

Løsning:

- Vi vet at $V_2 = \frac{1}{15} \cdot V_1$. Da får vi:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} = T_2 \cdot \left(\frac{1}{15} V_1\right)^{\gamma-1} = T_2 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{\gamma-1} \cdot V_1^{\gamma-1}$$

$$\Leftrightarrow T_1 = T_2 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_2 = T_1 \cdot 15^{\gamma-1} = (27 + 273) \text{ K} \cdot 15^{1.40-1} = \underline{\underline{886 \text{ K}}} = \underline{\underline{613^\circ\text{C}}}$$

Vi kan beregne p_2 ved å benytte likningen $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$. Det er imidlertid enklere å benytte tilstandslikningen:

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \Leftrightarrow p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \frac{V_1}{\frac{1}{15} V_1} \cdot \frac{886 \text{ K}}{300 \text{ K}} = \underline{\underline{44.7 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}.$$

- Utført arbeid blir

$$W = \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$$
$$= \frac{1}{1.40 - 1} (1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 - 4.48 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot (\frac{1}{15} \cdot 10^{-3}) \text{ m}^3) = \underline{\underline{-494 \text{ J}}}$$

Gassen *mottar* altså en energi i form av arbeid på 494 J.

Oppgave: [11.8.1.](#)

11.9. Sykliske prosesser.

Vi starter med en naturlig definisjon:

En prosess som begynner og slutter i samme tilstand, kaller vi en **kretsprosess** eller en **syklisk prosess**.

Vi vet at den indre energien for et system kun avhenger av tilstanden. Når et system gjennomløper en kretsprosess, er derfor den indre energien den samme ved slutten av prosessen som ved starten. Da har vi:

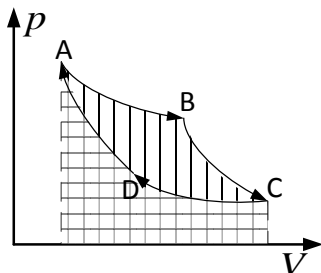
For enhver kretsprosess er

$$\Delta U = 0 \Leftrightarrow \Delta Q - W = 0 \Leftrightarrow \Delta Q = W .$$

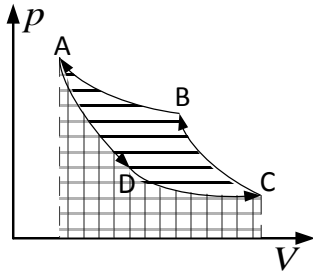
Denne likningen kan oppfattes må to måter:

1. Dersom både Q og W er positive, betyr det at systemet mottar varme fra omgivelsene, og utfører et arbeid på omgivelsene. Et system som gjennomløper en slik syklisk prosess kaller vi en **varmekraftmaskin**.
2. Dersom både Q og W er negative, betyr det at systemet mottar energi i form av arbeid fra omgivelsene, og avgir varme til omgivelsene. Et system som gjennomløper en slik syklisk prosess kaller vi en **kjølemaskin**.

Du ser pV -diagram for en varmekraftmaskin og en kjølemaskin nedenfor.



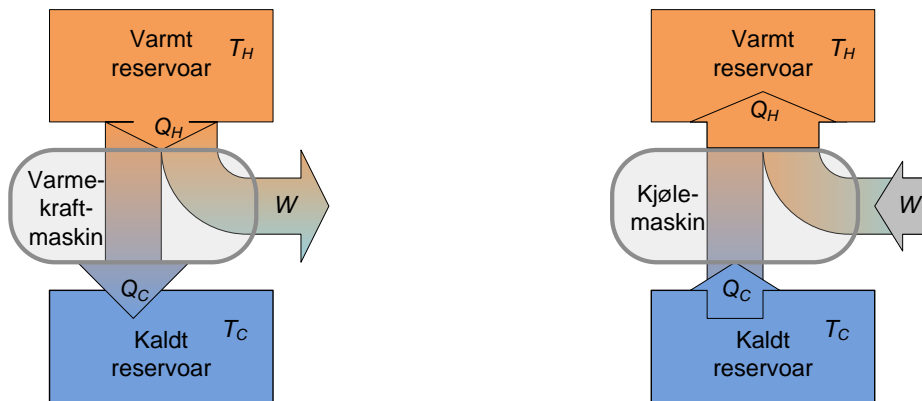
Varmekraftmaskinen til venstre gjennomløper syklusen $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ (med urviseren). Under denne syklusen *utfører* den et arbeid som er gitt ved arealet under grafen ABC, og *mottar* et arbeid som er gitt ved arealet under grafen CDA. Netto arbeid er da positivt, og er gitt ved arealet mellom grafene (vertikal skravering).



Kjølemaskinen til venstre gjennomløper syklusen $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ (mot urviseren). Under denne syklusen *utfører* den et arbeid som er gitt ved arealet under grafen ADC, og *mottar* et arbeid som er gitt ved arealet under grafen CBA. Netto arbeid er da negativt, og størrelsen av dette arbeidet er gitt ved arealet mellom grafene (horisontal skravering).

Det er nå vanlig å si at den varmen som systemet mottar kommer fra et **varmt reservoar**. Vi bruker symbolet Q_H for denne varmen. Den varmen som systemet avgir går til et **kaldt reservoar**. Vi bruker symbolet Q_C for denne varmen.

Virkemåten til varmekraftmaskiner og kjølemaskiner kan framstilles skjematisk slik:



Dersom vi lar både Q_H og Q_C være positive størrelser, og benytter fortegn for å angi retningen for varmestrømmen, får vi at

$$Q = W \Leftrightarrow Q_H - Q_C = W.$$

For en varmekraftmaskin betyr dette at arbeidet som systemet utfører er differansen mellom den varme-energien som systemet tilføres fra det varme reservoaret og den varme-energien som avgis til det kalde reservoaret. Fra et maskinteknisk synspunkt er det vanskelig å bruke denne avgitte varmen til noe nyttig. Det er derfor naturlig å definere **virkningsgraden** for en varmekraftmaskin som forholdet mellom netto arbeid og tilført varme:

For en **varmekraftmaskin** er virkningsgraden

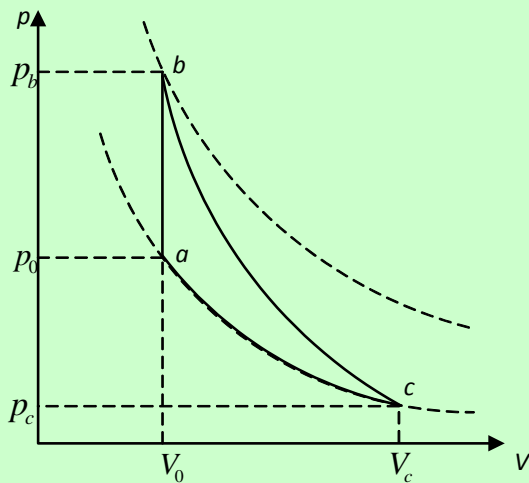
$$\nu = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}.$$

Eksempel 11.9.1: En ideell, enatomig gass med molar varmekapasitet $c_V = \frac{3}{2}R$ og adiabatkonstant $\gamma = \frac{5}{3}$ gjennomgår følgende syklus:

1. Fra en start-tilstand a med temperatur T_0 , volum V_0 og trykk p_0 varmes gassen opp under konstant volum til en tilstand b der trykket er dobbelt så stort som i a .

2. Deretter utvides gassen adiabatisk til en tilstand c der temperaturen igjen er blitt T_0 .
 3. Til slutt bringes gassen isotermt tilbake til start-tilstanden a .
- a) Tegn inn syklusen i et p - V -diagram, og finn temperaturene i tilstandene b og c uttrykt ved T_0 , volumene i tilstandene b og c uttrykt ved V_0 , og trykkene i tilstandene b og c uttrykt ved p_0 .
 - b) Regn ut det arbeidet som utføres og den varmen som tilføres under hver av prosessene $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$ og $c \rightarrow a$. Svarene skal uttrykkes ved produktet $p_0 V_0$.
 - c) Forklar at dette kan være syklusen til en varmekraftmaskin, og finn virkningsgraden til denne varmekraftmaskinen.

Løsning:



a) Vet at

$$V_b = V_a = \underline{V_0},$$

og at

$$p_b = 2p_a = \underline{2p_0}.$$

Av tilstandslikningen blir da

$$\frac{p_b V_b}{T_b} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

$$\Leftrightarrow T_b = T_0 \frac{p_b V_b}{p_0 V_0} = T_0 \frac{2p_0 V_0}{p_0 V_0} = \underline{2T_0}$$

Vet videre at

$$T_c = T_a = \underline{T_0}.$$

Siden $b \rightarrow c$ er en adiabat, blir

$$T_c V_c^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1} \Leftrightarrow V_c^{\gamma-1} = \frac{T_b}{T_c} V_b^{\gamma-1} = \frac{2T_0}{T_0} V_0^{\gamma-1} = 2V_0^{\gamma-1}$$

$$V_c = (2V_0^{\gamma-1})^{\frac{1}{\gamma-1}} = 2^{\frac{1}{\gamma-1}} V_0 = 2^{\frac{1}{\frac{5}{3}-1}} V_0 = \underline{\underline{2^{\frac{3}{2}} V_0}} = \underline{\underline{2\sqrt{2}V_0}}.$$

Tilstandslikningen gir til slutt

$$\frac{p_a V_a}{T_a} = \frac{p_c V_c}{T_c} \Leftrightarrow p_c = p_a \frac{T_c}{T_a} \cdot \frac{V_a}{V_c} = p_0 \frac{T_0}{T_0} \frac{V_0}{2\sqrt{2}V_0} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\sqrt{2}p_0}}.$$

b) $a \rightarrow b$: Siden volumet er konstant, er arbeidet $W_{ab} = \underline{0}$. Da blir

$$Q_{ab} = \Delta U_{ab} = c_v \cdot n(T_b - T_a) = c_v (nT_b - nT_a) = \frac{3}{2} R(n \cdot 2T_0 - n \cdot T_0) = \frac{3}{2} R \cdot nT_0 = \underline{\underline{\frac{3}{2} p_0 V_0}}.$$

$b \rightarrow c$: Under en adiabatisk tilstandsforandring er $Q_{bc} = \underline{0}$. Arbeidet er

$$W_{bc} = \frac{1}{\gamma-1} (p_b V_b - p_c V_c) = \frac{1}{\frac{5}{3}-1} (2p_0 \cdot V_0 - \frac{1}{4}\sqrt{2}p_0 \cdot 2\sqrt{2}V_0) = \frac{3}{2} (2p_0 V_0 - p_0 V_0) = \underline{\underline{\frac{3}{2} p_0 V_0}}.$$

$c \rightarrow a$: Under en isoterm tilstandsforandring er $\Delta U_{ca} = 0$. Da blir

$$Q_{ca} = W_{ca} = nRT_0 \ln\left(\frac{V_a}{V_c}\right) = p_0 V_0 \ln\left(\frac{V_0}{2\sqrt{2}V_0}\right) = p_0 V_0 \ln\left(\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\right) = -p_0 V_0 \ln\left(2^{\frac{3}{2}}\right) \\ = \underline{\underline{-\frac{3}{2} p_0 V_0 \ln 2}}$$

c) Vi ser av pV -diagrammet at det arbeidet som gassen utfører i prosess $b \rightarrow c$ er større enn det arbeidet som mottas i prosess $c \rightarrow a$. Netto arbeid er altså positivt, slik at vi kan ha en varmekraftmaskin.

Gassen mottar en varmemengde $Q_{ab} = \frac{3}{2} p_0 V_0$, og utfører et netto arbeid

$$W = W_{bc} + W_{ca} = \frac{3}{2} p_0 V_0 + \left(-\frac{3}{2} p_0 V_0 \ln 2\right) = \underline{\underline{\frac{3}{2} p_0 V_0 (1 - \ln 2)}}$$

Virkningsgraden blir

$$\nu = \frac{W}{Q} = \frac{\frac{3}{2} p_0 V_0 (1 - \ln 2)}{\frac{3}{2} p_0 V_0} = \underline{\underline{1 - \ln 2}} \approx \underline{\underline{0.31}}.$$

En kjølemaskin kan i prinsippet oppfattes som en varmekraftmaskin som kjøres baklengs. Den tilføres energi i form av arbeid, og tilføres også varme-energi fra et kaldt reservoar. Summen av disse energibidragene avgis til et varmt reservoar. Siden hensikten med en kjølemaskin er å fjerne varme-energi, er det naturlig å definere virkningsgraden for en kjølemaskin som forholdet mellom varme som fjernes fra det kalde reservoaret og det tilførte arbeidet:

For en kjølemaskin er virkningsgraden

$$\nu = \frac{Q_c}{|W|}.$$

Kjølemaskiner benytter som regel faseoverganger mellom væske og damp, og syklusene er derfor noe mer komplisert. Vi skal ikke komme inn på slike her.

Det er utviklet en lang rekke prosesser både for varmekraftmaskiner og for kjølemaskiner. I neste kapittel skal vi se på **Carnot-syklusen**, som er en slags "ideal-syklus". I et tillegg kan du se på en forenklet versjon av **Otto-syklusen**, som er den syklusen som en bensinmotor gjennomløper.

11.10. Termodynamikkens andre lov.

11.10.1. Reversible og irreversible prosesser.

La oss innlede med noen dagligdagse observasjoner:

- Dersom du heller varmt vann i en kald beholder, vil etter hvert vannet kjøles ned mens beholderen varmes opp inntil vann og beholder får samme temperatur. Men det er ikke mulig å gå motsatt vei. Du kan ikke starte med at vann og beholder har samme temperatur, hvoretter vannet av seg selv tar varme fra beholderen slik at vannet får høyere temperatur mens beholderen avkjøles. En slik motsatt prosess vil ikke være i strid med termodynamikkens første lov eller med noen andre lover vi har sett på hittil.

- Dersom du bremses opp en bil, vil bilens kinetiske energi gå over til varme i bremsetromler, bildekk og veidekke. Men du kan ikke tilføre varme til bremsetromler og bildekk, og få overført denne energien til kinetisk energi slik at bilen begynner å bevege seg. Heller ikke i dette eksemplet vil en slik motsatt prosess være i strid med noen av de lovene vi har sett på hittil.

Vi har altså behov for en ny lov som sier noe om i hvilken retning slike termodynamiske prosesser kan gå. Men før vi formulerer en slik lov, trenger vi et par viktige definisjoner.

En **reversibel prosess** mellom en tilstand A og en annen tilstand B er en prosess som kan gå begge veier.

Prosesser som ikke er reversible, kalles **irreversible**.

De to prosessene vi innledet med, er åpenbart irreversible. Hvis vi undersøker andre prosesser, vil vi etter hvert måtte innse at:

Alle naturlige prosesser er irreversible.

Reversible prosesser må altså oppfattes som en slags "idealisererte prosesser" som ikke forekommer naturlig. Likevel studerer vi reversible prosesser. Dette skyldes ikke bare en "intellektuell nysgjerrighet" for å finne ut hvilke prosesser som *ikke* lar seg gjennomføre i praksis selv om de ikke representerer noe brudd med de naturlovene vi har sett på hittil. Det viser seg nemlig at studiet av reversible og irreversible prosesser er viktig for å fastlegge egenskaper ved varmekraftmaskiner og kjølemaskiner.

Før vi går i gang for alvor, kan vi prøve å lage oss et par "nesten" reversible prosesser:

Vi har is med temperatur på 0°C . Denne isen bringer vi i kontakt med et varmereservoar som har en temperatur *litt* over 0°C . Da kan vi *langsomt* tilføre varme fra dette varmereservoaret til isen, og isen vil *langsomt* smelte slik at vi får vann ved 0°C . Hele tiden må vi ha likevekt mellom is og vann slik at begge fasene har samme temperatur.

Denne prosessen kan vi tenke oss reversert. Vi starter med vann på 0°C som vi bringer i kontakt med et varmereservoar som har temperatur *litt* under 0°C . Da vil varme *langsomt* avgis fra vannet til varmereservoaret slik at mer og mer av vannet *langsomt* fryser til is.

Ved å ta tiden til hjelp, kan dette tenkes oppnådd selv om det er så ekstremt små temperaturforskjeller mellom vårt system (vann/is) og varmereservoaret at prosessene må kunne oppfattes som reversible. Det er viktig å merke seg at i slike tenkte reversible prosesser må det være termisk likevekt mellom alle delene av systemet, og det må også være termisk likevekt med omgivelsene.

Et eksempel til: I mekanikken har vi sett at kinetisk energi kan omformes til potensiell energi eller omvendt. I prinsippet er dette reversible prosesser. Men i praksis vil det alltid forekomme friksjon, som fører til at prosessene ikke er *helt* reversible. Friksjonsarbeidet innebærer at mekanisk energi omformes til varme, som deretter avgis til omgivelsene. Dersom vi kan innrette oss slik at det ikke avgis noe friksjonsvarme, kan et slikt system utføre reversible prosesser. Fra et termodynamisk synspunkt innebærer dette at prosessene er adiabatisk. Dette eksemplet illustrerer at *adiabatiske* prosesser under visse betingelser kan oppfattes som reversible.

11.10.2. Termodynamikkens 2. lov.

Vi har altså slått fast at alle virkelige prosesser er irreversible, d.v.s. at de kun kan gå en vei. Da trenger vi en lov som sier oss hvilken vei slike prosesser kan gå. En slik lov ble gradvis utviklet i første halvdel av 1800-tallet i forbindelse med studiet av varmekraftmaskiner. Loven kalles *termodynamikkens 2. lov*, og foreligger i flere ekvivalente formuleringer. Her er de to vanligste:

Termodynamikkens 2. lov:

Ingen prosess er mulig der det eneste resultatet er at varme avgis fra et varmereservoar og omsettes helt til arbeid. (Kelvins formulering).

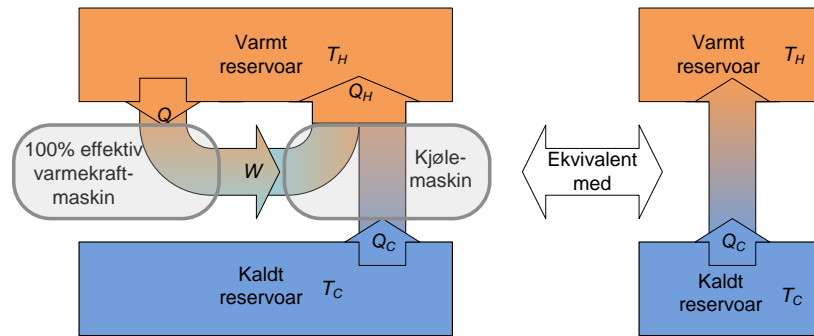
Ingen prosess er mulig der det eneste resultatet er at varme avgis fra ett reservoar og absorberes av et annet reservoar med høyere temperatur. (Clausius formulering).

Denne loven kan ikke utledes matematisk. Det er en *empirisk* lov, d.v.s. at den baserer seg på en mengde eksperimenter som alle støtter loven. Det fins ingen eksempler på at loven ikke holder.

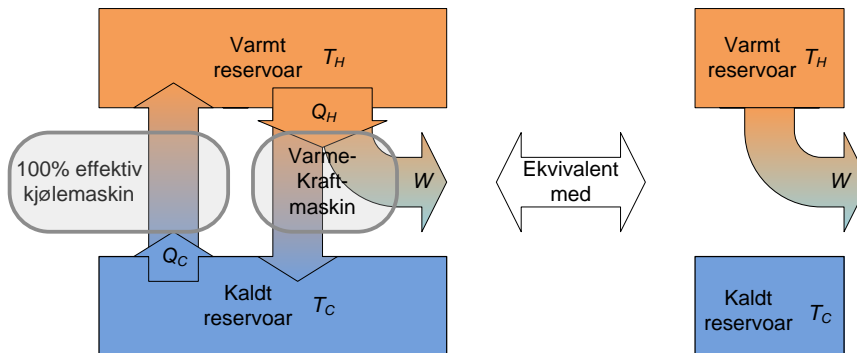
Kelvins formulering sier at det er umulig å konstruere en 100% effektiv varmekraftmaskin. Det er ikke mulig å omforme all energien som tas fra det varme reservoaret til arbeid. Noe av energien som tas fra det varme reservoaret må "gå tapt" til det kalde reservoaret.

Clausius formulering sier at dersom vi skal avgi varme fra ett reservoar til et annet som har høyere temperatur, må vi tilføre arbeid. Dette vet vi av erfaring: Skal kjøleskapet fungere, må det tilføres energi.

Selv om disse to formuleringene er svært forskjellige, kan vi vise at de er ekvivalente. Dersom Kelvins formulering var *usann* (det eksisterer en 100% effektiv varmekraftmaskin), kan denne brukes til å lage en kjølemaskin som er 100% effektiv slik figuren nedenfor viser.



Og dersom Clausius formulering var *usann* (det eksisterer en 100% effektiv kjølemaskin), kan denne brukes til å lage en varmekraftmaskin som er 100% effektiv slik figuren nedenfor viser.



11.11. Reversible og irreversible sykliske prosesser.

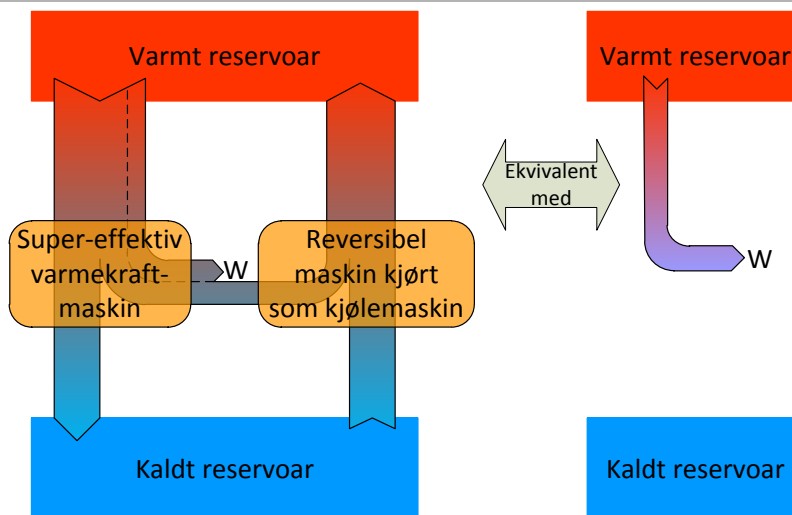
11.11.1. Optimal virkningsgrad.

Da vi studerte sykliske termodynamiske prosesser, tenkte vi ikke på om de var reversible eller irreversible. Men vi har jo nettopp sett at alle virkelige prosesser er irreversible. Da må også alle virkelige sykliske prosesser (som jo er satt sammen av enklere prosesser) også være irreversible.

La oss tenke oss at vi har konstruert en maskin som følger en fullstendig *reversibel* syklus. En slik maskin må kunne kjøres som varmekraftmaskin eller som kjølemaskin etter behov. Da innser vi at:

1. Det er umulig å konstruere en varmekraftmaskin som har større virkningsgrad enn en reversibel varmekraftmaskin som virker mellom de samme to temperatuene.
2. Alle reversible varmekraftmaskiner som virker mellom de samme to temperatuene har samme virkningsgrad.

Vi skal bruke figuren nedenfor til å begrunne disse påstandene

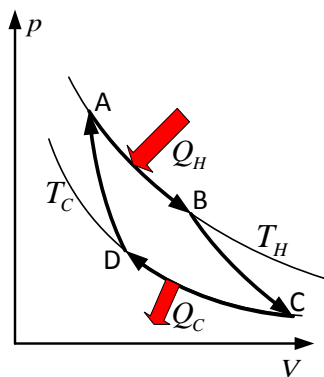


Anta at det eksisterer en super-effektiv varmekraftmaskin som har større virkningsgrad enn en reversibel varmekraftmaskin, d.v.s. at den tar mer varme fra det varme reservoaret og utfører mer arbeid enn den reversible varmekraftmaskinen uten å avgi mer varme til det kalde reservoaret. Da kunne vi latt vår reversible varmekraftmaskin fungere som kjølemaskin, og latt vår super-effektive maskinen drive denne. Vi vil da sitte igjen med et "overskudds-arbeid" som ikke er nødvendig for å drive kjølemaskinen. Nettovirkningen er altså at vi har fått en innretning som overfører varme fra det varme reservoaret til arbeid uten at noe varme går til det kalde reservoaret, i strid med Kelvins formulering av termodynamikkens 2. lov.

Et helt tilsvarende resonnement kan brukes til å begrunne at alle reversible maskiner har samme virkningsgrad. Dersom en slik reversibel maskin har større eller mindre virkningsgrad enn en annen, kan vi kople dem sammen og kjøre den ene som kjølemaskin og den andre som varmekraftmaskin, og kan dermed få et nettoresultat som er i strid med enten Kelvins eller Clausius formulering av termodynamikkens 2. lov.

11.11.2. Carnot-syklusen.

Nå er det på tide å lage en reversibel syklus som kan brukes som varmekraftmaskin eller som kjølemaskin etter behov. Den franske ingeniøren **Sadi Carnot** foreslo en slik syklus allerede i 1824, men det var først rundt midten av 1800-tallet at man virkelig innså hvor viktig den var i teoretiske arbeider.



Vi starter med en gass i tilstand A, der temperaturen er T_H . Der bringes systemet i kontakt med et varmt reservoar som også har temperaturen T_H . Så utvides gassen *isotermt* til tilstand B ved at systemet hele tiden holdes i kontakt med varmereservoaret mens det mottar en varmemengde Q_H . Prosessen foregår så langsomt at det hele tiden er termisk likevekt. Da er prosessen $A \rightarrow B$ reversibel.

Fra B gjennomløper systemet en *adiabatisk* utvidelse til tilstand C der temperaturen er T_C . Også denne prosessen kan gjøres reversibel.

I tilstand C bringes systemet i kontakt med et varmereservoar som også har temperaturen T_C . Så presses gassen sammen *isotermt* til en tilstand D mens den avgir en varmemengde Q_C . Tilstand D er valgt slik at en *adiabatisk* sammenpressing av gassen fra D bringer systemet tilbake til A.

Begge disse to siste prosessene kan gjøres reversible på samme måte som prosessene $A \rightarrow B$ og $B \rightarrow C$. Siden alle delprosessene er reversible, er hele syklusen også reversibel.

La oss se nærmere på hvordan vi må velge tilstand D dersom arbeidssubstansen er en ideell gass. Siden både $B \rightarrow C$ og $D \rightarrow A$ er adiabatisk, har vi at

$$T_H V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

og

$$T_H V_A^{\gamma-1} = T_C V_D^{\gamma-1}.$$

Deler disse sammenhengene på hverandre, og får

$$\frac{T_H V_B^{\gamma-1}}{T_H V_A^{\gamma-1}} = \frac{T_C V_C^{\gamma-1}}{T_C V_D^{\gamma-1}} \Leftrightarrow \frac{V_B^{\gamma-1}}{V_A^{\gamma-1}} = \frac{V_C^{\gamma-1}}{V_D^{\gamma-1}} \Leftrightarrow \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Nå skal vi beregne virkningsgraden til en slik *Carnotmaskin* der arbeidssubstansen er en ideell gass. Vi husker at virkningsgraden til en varmekraftmaskin er

$$\nu = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}$$

der både Q_H og Q_C ble regnet som positive. Siden prosessen $A \rightarrow B$ er isoterm prosess, er

$$Q_H = W_{A \rightarrow B} = nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right).$$

Prosessene $C \rightarrow D$ er også isoterm, slik at

$$\begin{aligned} Q_C = |W_{C \rightarrow D}| &= \left| nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) \right| = nRT_C |(\ln V_D - \ln V_C)| = nRT_C (\ln V_C - \ln V_D) \\ &= nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right) \end{aligned}$$

Merk at vi må bruke absoluttverditegn fordi Q_C skal være positiv. Vi kvitter oss med absoluttverditegnet ved å benytte at $V_C > V_D$.

Til slutt benytter vi at $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$, og får at virkningsgraden blir

$$\nu = 1 - \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = \frac{T_H - T_C}{T_H}.$$

Vi har tidligere funnet at alle reversible varmekraftmaskiner har samme virkningsgrad, og at ingen varmekraftmaskiner basert på reelle, irreversible prosesser kan ha høyere virkningsgrad. Siden Carnot-maskinen er reversibel, har vi altså funnet at:

Virkningsgraden til en reversibel varmekraftmaskin er

$$\nu = 1 - \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = \frac{T_H - T_C}{T_H},$$

som også er øvre grense for virkningsgraden til reelle varmekraftmaskiner som arbeider mellom de samme temperaturene.

Før vi går videre, skal vi ta med oss et resultat som skal vise seg å bli viktig. Av ramma ovenfor får vi

$$1 - \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{T_C}{T_H} \Leftrightarrow \frac{Q_C}{Q_H} = \frac{T_C}{T_H} \Leftrightarrow \frac{Q_C}{T_C} = \frac{Q_H}{T_H}.$$

Eksempel 11.11.1: En Carnotmaskin absorberer $Q_H = 2000\text{J}$ varme fra et reservoar med temperaturen $T_H = 500\text{K}$, gjør noe arbeid, og avgir noe varme til et kaldt reservoar med temperaturen $T_C = 350\text{K}$. Hvor mye varme avgir maskinen, hvor mye arbeid gjør den, og hva er virkningsgraden til maskinen?

Løsning: Benytter at

$$\frac{Q_C}{Q_H} = \frac{T_C}{T_H} \Leftrightarrow Q_C = \frac{T_C}{T_H} \cdot Q_H = \frac{350\text{K}}{500\text{K}} \cdot 2000\text{J} = \underline{1400\text{J}}.$$

Altså avgir maskinen 1400J til det kalde reservoaret.

Siden Carnotmaskinen er syklisk, vet vi at $\Delta U = 0$. Fra termodynamikkens første lov får vi da at

$$W = Q = Q_H + Q_C = 2000\text{J} - 1400\text{J} = 600\text{J}.$$

Virkningsgraden til maskinen er

$$\nu = 1 - \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{1400\text{J}}{2000\text{J}} = \underline{0.30} = \underline{30\%}.$$

Eksempel 11.11.2: Anta at 0.200 mol av en ideell toatomig gass med adiabatkonstant $\gamma = 1.40$ gjennomfører en Carnot-syklus med temperaturene 227°C og 27°C . Starttrykket i prosessen er $p_A = 10.0 \cdot 10^5 \text{Pa}$, og i løpet av den isoterme utvidelsen ved den høyeste temperaturen doubles volumet.

- Finn trykket og volumet ved tilstandene A, B, C og D i pV -diagrammet for Carnot-syklusen.
- Finn Q , W og ΔU for delprosessene $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$ og $D \rightarrow A$.
- Bestem virkningsgraden både ved hjelp av resultatene i b) og ved å bruke at

$$\nu = 1 - \frac{T_C}{T_H} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_H}.$$

Løsning: Vi kjenner temperatuere

$$T_C = T_C = T_D = 27^\circ\text{C} = 300\text{K}$$

$$T_H = T_A = T_B = 227^\circ\text{C} = 500\text{K}$$

a) **Tilstand A:** Fra likningen for en ideell gass får vi

$$V_A = \frac{nRT_H}{p_A} = \frac{0.200 \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot 500\text{K}}{10.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = \underline{\underline{8.31 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}}.$$

Tilstand B: Volumet dobles i den isoterme utvidelsen $A \rightarrow B$. Da blir:

$$V_B = 2V_A = 2 \cdot 8.31 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = \underline{\underline{16.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}}.$$

Siden $T_B = T_A = T_H$, gir likningen for en ideell gass at

$$p_A V_A = p_B V_B \Leftrightarrow p_B = \frac{p_A V_A}{V_B} = \frac{p_A V_A}{2V_A} = \frac{1}{2} p_A = \frac{1}{2} \cdot 10.0 \cdot 10^5 \text{ Pa} = \underline{\underline{5.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}.$$

Tilstand C: For den adiabatisk utvidelsen $B \rightarrow C$ vet vi at

$$T_H V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Leftrightarrow V_C = \left(\frac{T_H}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_B = \left(\frac{500\text{K}}{300\text{K}}\right)^{\frac{1}{1.40-1}} \cdot 16.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = \underline{\underline{59.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}}.$$

Likningen for en ideell gass gir oss nå at

$$p_C = \frac{nRT_C}{V_C} = \frac{0.200 \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot 300\text{K}}{59.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3} = \underline{\underline{0.837 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}.$$

Tilstand D: For den adiabatisk sammenpressingen $D \rightarrow A$ vet vi at

$$T_C V_D^{\gamma-1} = T_H V_A^{\gamma-1} \Leftrightarrow V_D = \left(\frac{T_H}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A = \left(\frac{500\text{K}}{300\text{K}}\right)^{\frac{1}{1.40-1}} \cdot 8.31 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = \underline{\underline{29.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}}.$$

Siden $T_D = T_C$ gir likningen for en ideell gass at

$$p_D V_D = p_C V_C \Leftrightarrow p_D = \frac{p_C V_C}{V_D} = \frac{0.837 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 59.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}{29.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3} = \underline{\underline{1.67 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}.$$

b) Den molare varmekapasiteten ved konstant volum er

$$c_V = \frac{R}{\gamma-1} = \frac{8.31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}}{1.40-1} = \underline{\underline{20.8 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}}}.$$

Prosess $A \rightarrow B$: Siden utvidelsen $A \rightarrow B$ er isoterm, blir $\Delta U_{A \rightarrow B} = 0$ slik at

$$Q_H = W_{A \rightarrow B} = nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 0.200 \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot 500\text{K} \cdot \ln 2 = \underline{\underline{576 \text{ J}}}.$$

Prosess $B \rightarrow C$: For den adiabatisk utvidelsen $B \rightarrow C$ er $Q = 0$. Dermed er

$$W_{B \rightarrow C} = -\Delta U_{B \rightarrow C} = n \cdot c_V (T_H - T_C) = 0.200 \cdot 20.8 \text{ J/K} \cdot (500\text{K} - 300\text{K}) = \underline{\underline{832 \text{ J}}}$$

Prosess $C \rightarrow D$: Siden sammenpressingen $C \rightarrow D$ er isoterm, blir $\Delta U_{C \rightarrow D} = 0$ slik at

$$Q_C = W_{C \rightarrow D} = nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = 0.200 \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot 300\text{K} \cdot \ln\left(\frac{29.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}{59.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}\right) = \underline{\underline{-346 \text{ J}}}.$$

Prosess D → A : For den adiabatisk sammenpressingen D → A er $Q = 0$. Dermed er

$$W_{D \rightarrow A} = -\Delta U_{D \rightarrow A} = n \cdot c_V (T_C - T_H) = 0.200 \cdot 20.8 \text{ J/K} \cdot (300 \text{ K} - 500 \text{ K}) = \underline{\underline{-832 \text{ J}}}.$$

Vi kan samle alle resultatene i følgende tabell:

Prosess	Q	W	ΔU
A → B	576J	576J	0
B → C	0	832J	-832J
C → D	-346J	-346J	0
D → A	0	-832J	832J
Totalt	230J	230J	0

c) Fra tabellen over ser vi at for hele prosessen er $W = 230 \text{ J}$ og $Q_H = Q_{A \rightarrow B} = 576 \text{ J}$. Da blir virkningsgraden

$$\nu = \frac{W}{Q_H} = \frac{230 \text{ J}}{576 \text{ J}} = \underline{\underline{0.40}} = \underline{\underline{40\%}}.$$

Som kontroll ser vi at

$$\nu = 1 - \frac{T_C}{T_H} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{500 \text{ K}} = \underline{\underline{0.40}} = \underline{\underline{40\%}}$$

eller

$$\nu = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_H} = 1 - \frac{|-346 \text{ J}|}{576 \text{ J}} = \underline{\underline{0.40}} = \underline{\underline{40\%}}.$$

Carnot-syklusen ovenfor brukte en ideell gass som arbeidssubstans. Men det er fullt mulig å lage Carnot-sykluser for andre arbeidssubstanser. Vi kan endog lage Carnot-sykluser som inneholder faseoverganger. Carnot-syklusen er derfor mye mer generell enn analysene hittil gir uttrykk for.

*11.11.3. Den termodynamiske temperaturskalaen.

Da vi analyserte Carnot-syklusen, fant vi at virkningsgraden var

$$\nu = 1 - \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{T_C}{T_H} \Leftrightarrow \frac{Q_C}{Q_H} = \frac{T_C}{T_H}.$$

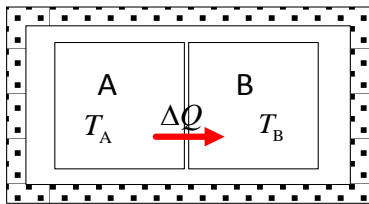
Den engelske fysikeren William Thompson, som ble adlet under navnet Lord Kelvin, foreslo at man skulle definere temperaturskalaen slik at forholdet mellom mottatt og avgitt varme for en Carnot-syklus skal være lik forholdet mellom temperaturene i de to varmereservoarene.

Dermed brukes sammenhengen

$$\frac{Q_C}{Q_H} = \frac{T_C}{T_H}$$

til å definere temperaturskalaen. I tillegg defineres temperaturen i vannets trippelpunkt til å være 273.16 K. Disse to definisjonene gir da en temperaturskala som er helt uavhengig av et bestemt stoff, og som bare bygger på termodynamikkens 2. lov og Carnot-syklusen.

11.12. Entropi.



La oss starte med et lite eksempel. Anta at to legemer A og B er i termisk kontakt inne i en termisk isolert beholder, og at en varmemengde ΔQ strømmer fra A til B. I praksis forutsetter dette at $T_A > T_B$, og prosessen er derfor irreversibel. Men vi kan tenke oss at denne temperaturforskjellen er svært liten, slik at vi tilnærmet kan sette $T_A = T_B$. Da vil prosessen være reversibel.

Nå slår vi til med en viktig definisjon:

Dersom et legeme mottar en varmemengde ΔQ ved en reversibel prosess mens temperaturen er konstant lik T , er legemets *endring av entropi* gitt ved

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}.$$

La oss gå tilbake til vårt lille eksempel. Vi antar at ΔQ er så liten at temperaturene i legemene ikke endres. Siden A avgir varme, vil A få redusert sin entropi med en størrelse

$$\Delta S_A = \frac{-\Delta Q}{T_A}.$$

Legeme B mottar den samme varmemengden, og får økt sin entropi med

$$\Delta S_B = \frac{\Delta Q}{T_B}.$$

Dersom vi kan betrakte prosessen som reversibel, d.v.s. at $T_A = T_B$, blir den *samlede* endring i entropi

$$\Delta S_{\text{rev}} = \Delta S_A + \Delta S_B = \frac{-\Delta Q}{T_A} + \frac{\Delta Q}{T_B} = 0.$$

Men for den reelle, *irreversible* prosessen der $T_A > T_B$, blir den samlede endringen i entropi

$$\Delta S_{\text{irrev}} = \Delta S_A + \Delta S_B = \frac{-\Delta Q}{T_A} + \frac{\Delta Q}{T_B} > 0$$

fordi $\frac{\Delta Q}{T_B} > \frac{\Delta Q}{T_A}$ når $T_B < T_A$. Dette lille eksemplet illustrerer to viktige setninger:

1. Når vi tar hensyn til alle delsystemer som deltar i en prosess, kan entropien aldri avta.
2. Ved enhver reversibel prosess er entropien bevart.

Disse setningene kan ikke bevises. De er postulater som er understøttet av en lang rekke eksperimenter og teoretiske undersøkelser. Man har aldri funnet noe eksempel på at disse setningene ikke stemmer. De utgjør en alternativ formulering av termodynamikkens 2. lov.

Legg merke til at setningene forutsetter at vi tar hensyn til *alle* delsystemer som inngår i en prosess.

Eksempel 11.12.1:

1.00kg is ved 0°C smeltes til vann med temperaturen 0°C. Hvor mye har entropien i isen endret seg? Smeltevarmen til is er $L_f = 3.34 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$.

Løsning: Den tilførte varmemengden er

$$\Delta Q = m \cdot L_f = 1.00 \text{ kg} \cdot 3.34 \cdot 10^5 \text{ J/kg} = 3.34 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Siden temperaturen i is/vann-blandingen hele tiden er konstant, kan vi oppfatte prosessen som reversibel. Dermed er endringen i isens entropi

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{3.34 \cdot 10^5 \text{ J}}{273 \text{ K}} = 1.22 \cdot 10^3 \text{ J/K}.$$

I eksemplet over skal vi merke oss at *omgivelsene* har avgitt den samme varmemengden som isen har mottatt. Dermed har omgivelsenes entropi avtatt. Dersom prosessen er reversibel slik at omgivelsene også har temperaturen 0°C, har omgivelsenes entropi avtatt like mye som isens entropi har økt. Men i praksis er omgivelsenes temperatur høyere enn 0°C. Da har omgivelsenes entropi avtatt *mindre* enn isens entropi har økt, og den totale entropien har dermed økt.

Den oppmerksomme leser har kanskje lagt merke til at vi hittil kun har definert entropiendringer for *reversible* prosesser. Når vi skal beregne entropiendringer for *irreversible* prosesser, støtter vi oss på setningen nedenfor:

Entropien til et system avhenger kun av systemets tilstand.

Også dette er egentlig et postulat som er understøttet av en mengde undersøkelser. Men det hjelper oss til å beregne entropiendringen ved *irreversible* prosesser. Vi erstatter rett og slett en irreversibel prosess med (uendelig mange) *reversible* prosesser som bringer systemet fra start-tilstanden til slutt-tilstanden. Ved hver slik reversibel prosess antar vi at temperaturen er konstant. Ved å summere (i praksis integrere) alle bidragene, får vi:

Entropiendring i en irreversibel prosess er gitt ved

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

der vi integrer en serie *reversible* prosesser fra start-tilstanden 1 til slutt-tilstanden 2.

Eksempel 11.12.2: 1.00kg vann ved 0°C varmes til 100°C. Beregn endringen i vannets entropi.

Løsning: I praksis er dette en irreversibel prosess. Men vi kan tenke oss at prosessen gjøres i infinitesimale trinn der vi tilfører varmen dQ og temperaturen øker med dT . Hvert av disse trinnene er reversible, og ved å gjennomføre uendelig mange slike trinn vil vi ha varmet opp vannet til den ønskede temperaturen. For hvert trinn er den tilførte varmen

$$dQ = c \cdot m \cdot dT .$$

Den totale entropiendringen for vannet blir da

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T=273\text{K}}^{T=373\text{K}} \frac{dQ}{T} = \int_{273\text{K}}^{373\text{K}} \frac{c \cdot m \cdot dT}{T} = c \cdot m \int_{273\text{K}}^{373\text{K}} \frac{dT}{T} = c \cdot m \cdot [\ln T]_{273\text{K}}^{373\text{K}} \\ &= c \cdot m \cdot (\ln(373\text{K}) - \ln(273\text{K})) = 4190\text{J/kg} \cdot 1.00\text{kg} \cdot \ln\left(\frac{373\text{K}}{273\text{K}}\right) = \underline{\underline{1.31 \cdot 10^3 \text{J/K}}} \end{aligned}$$

Nå skal se på et litt mer komplisert eksempel:

Eksempel 11.12.3: Anta at 1.00kg vann ved 100°C settes i termisk kontakt med 1.00kg vann ved 0°C. Hvor mye har entropien i dette systemet endret seg fra det blir termisk kontakt til det er termisk likevekt?

Løsning: Siden det er like mye vann som avkjøles og som varmes opp, blir temperaturen i blandingsvannet 50°C = 323K. Tilsvarende resonnerement som i eksemplet ovenfor gir at entropiendringen til det varme vannet er

$$\Delta S_{\text{varmt}} = \int_{373\text{K}}^{323\text{K}} \frac{dQ}{T} = mc \int_{373\text{K}}^{323\text{K}} \frac{dT}{T} = 1.00\text{kg} \cdot 4190\text{J/kg} \cdot \ln\left(\frac{323\text{K}}{373\text{K}}\right) = \underline{\underline{-603\text{J/K}}} .$$

Entropiendringen i det kalde vannet er likeledes

$$\Delta S_{\text{kaldt}} = \int_{273\text{K}}^{323\text{K}} \frac{dQ}{T} = mc \int_{273\text{K}}^{323\text{K}} \frac{dT}{T} = 1.00\text{kg} \cdot 4190\text{J/K} \cdot \ln\left(\frac{323\text{K}}{273\text{K}}\right) = \underline{\underline{705\text{J/K}}} .$$

Den totale entropiendringen i systemet er dermed

$$\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_{\text{varmt}} + \Delta S_{\text{kaldt}} = -603\text{J/K} + 705\text{J/K} = \underline{\underline{102 \text{J/K}}} .$$

Vi ser at entropien i systemet har økt, noe vi måtte vente siden prosessen er irreversibel.

Entropi er en uullen, men svært viktig størrelse innen termodynamikken som vi burde behandlet grundigere. Men vi skal nøye oss med noen spredte betraktninger.

La oss se på entropiendringen ved en Carnot-syklus. Ved de to adiabatisk delprosessene er $\Delta Q = 0$, slik at også $\Delta S = 0$. Ved de to isoterme delprosessene er entropiendringene

$$\Delta S_H = \frac{Q_H}{T_H} \text{ og } \Delta S_C = \frac{-Q_C}{T_C} .$$

Men for en Carnot-prosess er

$$\frac{Q_C}{T_C} = \frac{Q_H}{T_H}$$

slik at entropiendringen for den gassen som gjennomløper en Carnot-syklus er

$$\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_C = \frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_C}{T_C} = 0.$$

Vi ser (som ventet) at entropien er bevart ved en slik reversibel syklus. Denne observasjonen var faktisk noe av grunnlaget for at man gradvis ble klar over at $\frac{\Delta Q}{T}$ er en nyttig størrelse.

Vi har tidligere formulert termodynamikkens 1. lov på formen

$$\Delta Q = \Delta U + W.$$

Men her er det bare U som er *tilstandsvariabel*. Både ΔQ og W avhenger av hvordan prosessen foregår. Det kan da være hensiktsmessig å skrive loven på differensialform:

$$dU = dQ + dW$$

og deretter innføre

$$dS = \frac{dQ}{T} \Leftrightarrow dQ = T \cdot dS$$

og

$$dW = p \cdot dV.$$

Da får vi

$$dU = T \cdot dS + p \cdot dV,$$

slik at loven er formulert bare ved tilstandsvariabler.

Men hva er egentlig entropi? Man kan forklare entropi som et *mål for uorden*. Dette kan begrunnes dersom vi virkelig tar konsekvensen av at en gass består av molekyler i tilfeldig bevegelse. Da kan vi bruke statistiske metoder, og vise at en øking av entropien henger sammen med at molekylbevegelsene blir mer uordnet.

Vi har tidligere sagt at den indre energien til et legeme kan knyttes til molekylenes kinetiske energi, og til potensiell energi som skyldes krefter mellom molekylene. Slike molekylbevegelser er *tilfeldige og uordnet*. Når legemet som helhet beveger seg, har det en kinetisk og potensiell energi knyttet til en *samordnet* bevegelse til alle molekylene. Når et legeme som glir langs ei flate stopper opp på grunn av friksjon, går kinetisk energi over til varme. Dette svarer til at energi knyttet til *ordnet* bevegelse av hele legemet går over til *tilfeldige* bevegelse i legemets og flatas molekyler. Denne energien som er knyttet til *uordnet* bevegelse kan vi ikke uten videre føre fullstendig tilbake til ordnet bevegelse. Vi sier at *entropien har økt*.

En ubehagelig konsekvens av termodynamikkens 2. lov er at universets totale entropi øker. Dette betyr at stadig mer av energien i universet går over til varme slik at energien i universet blir stadig vanskeligere å utnytte.

*11.13. Tillegg.

11.13.1. Trykket i en ideell gass.

Tidligere har vi satt opp sammenhengen mellom trykk og volum i en gass, og molekylenes kinetiske energi. Nå skal vi lage en forenklet utledning av denne sammenhengen.

Vi har N molekyler i en beholder som har volum V . Vi skal nå anta at alle disse molekylene har samme fart v , og at de beveger seg enten langs x -aksen, y -aksen eller z -aksen, $\frac{1}{3}N$ langs

hver akse. Halvparten av de som beveger seg langs en akse vil bevege seg i positiv retning og den andre halvparten går i negativ retning.

En av veggene i beholderen står vinkelrett på en slik akse. Antall molekyler som har retning mot denne veggen vil da alltid være $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} N = \frac{1}{6} N$.

I løpet av et kort tidsintervall Δt vil alle partikler som har retning mot veggen, og er nærmere veggen enn $\Delta s = v \cdot \Delta t$ kolliderer med veggen. Dersom veggen har areal A , vil disse partiklene befinne seg innenfor et volum

$$\Delta V = A \cdot \Delta s = A \cdot (v \cdot \Delta t).$$

Antall partikler som kolliderer med veggen i dette tidsintervallet, blir da

$$\frac{1}{6} N \cdot \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{6} N \cdot \frac{A \cdot v \cdot \Delta t}{V}.$$

Vi antar at støtet mot veggen er fullstendig elastisk slik at partikkelen etter støtet går i motsatt retning med samme fart som før. Hver av disse partiklene får en endring av bevegelsesmengde gitt ved

$$mv - m(-v) = 2mv.$$

Men den samlede endringen av bevegelsesmengde for alle partiklene må være lik kraftstøtet $F \cdot \Delta t$ fra gassen mot veggen. Dersom vi kaller gjennomsnittskraften fra gassen mot veggen for F , får vi:

$$F \cdot \Delta t = \underbrace{\frac{1}{6} N \cdot \frac{A \cdot v \cdot \Delta t}{V}}_{\text{Antall partikler som støter mot veggen}} \cdot \underbrace{2mv}_{\text{Bidrag fra hver partikkel}} \Leftrightarrow F = \frac{1}{3} N \cdot \frac{A}{V} \cdot mv^2.$$

Til slutt skal vi benytte definisjonen av trykk:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \cdot mv^2 = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \cdot \left(\frac{1}{2} mv^2\right).$$

Den siste parenteser kjenner vi igjen som den kinetiske energien W_k til hver partikkel. Den samlede kinetiske energien til alle de N partiklene blir da $E_k = N \cdot W_k = N \cdot \left(\frac{1}{2} mv^2\right)$. Da kan vi summere opp resultatene slik:

Vi har N partikler i en beholder med volum V . Den gjennomsnittlige kinetiske energien til en partikkel er $W_k = \frac{1}{2} mv^2$ slik at den totale kinetiske energien til alle partiklene i gassen er

$$E_k = N \cdot W_k.$$

Da er trykket i gassen gitt ved

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot W_k = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{V} \cdot E_k \Leftrightarrow p \cdot V = \frac{2}{3} E_k = \frac{2}{3} N \cdot W_k.$$

11.13.2. Tilstandslikning for en ideell gass ved en adiabatisk prosess.

Vi skal nå utlede noen sammenhenger som gjelder for en ideell gass under en adiabatisk prosess. Vi tar utgangspunkt i en *svært liten* volumøkning dV . Under en slik svært liten volumøkning kan vi anta at trykket tilnærmet er konstant, slik at arbeidet under denne volumøkningen er

$$dW = p \cdot dV = \frac{nRT}{V} \cdot dV$$

der vi har benyttet at

$$pV = nRT \Leftrightarrow p = \frac{nRT}{V}.$$

Samtidig vil temperaturen endres med dT , slik at den indre energien endres med

$$dU = n \cdot c_v \cdot dT = n \cdot \frac{R}{\gamma - 1} \cdot dT.$$

For en adiabatisk prosess er da

$$dU = -dW \Leftrightarrow n \cdot \frac{R}{\gamma - 1} \cdot dT = -\frac{nRT}{V} dV \Leftrightarrow \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}.$$

Vi løser denne differensiallikningen ved å integrere fra en start-tilstand (T_1, V_1) til en slutt-tilstand (T_2, V_2) . Vi får

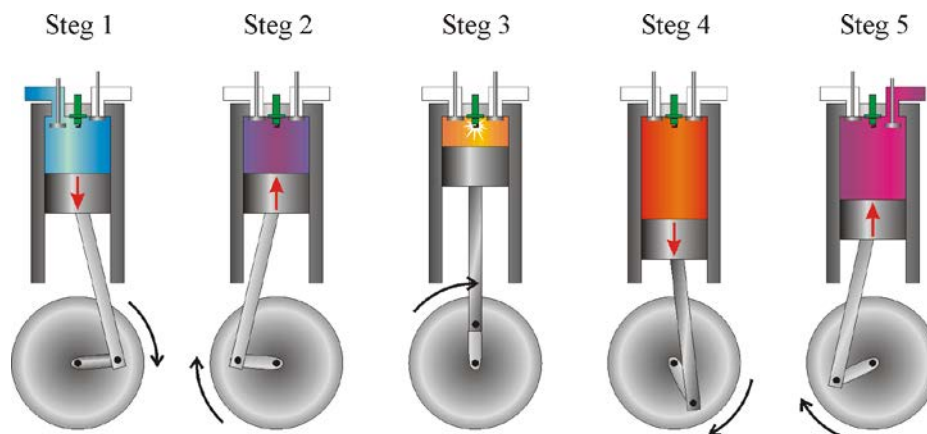
$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} &= -\int_{V_1}^{V_2} (\gamma - 1) \cdot \frac{dV}{V} \Leftrightarrow [\ln T]_{T_1}^{T_2} = -(\gamma - 1) [\ln V]_{V_1}^{V_2} \\ \Leftrightarrow \ln T_2 - \ln T_1 &= -(\gamma - 1)(\ln V_2 - \ln V_1) = (\gamma - 1)(\ln V_1 - \ln V_2) \\ \Leftrightarrow \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) &= (\gamma - 1) \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = \ln \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] \end{aligned}$$

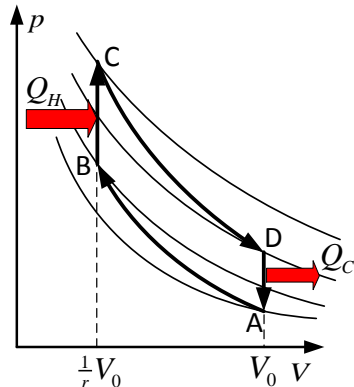
Da blir

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} = \frac{V_1^{\gamma - 1}}{V_2^{\gamma - 1}} \Leftrightarrow \underline{T_1 \cdot V_1^{\gamma - 1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma - 1}}.$$

11.13.3. Otto-syklusen.

Ottosyklusen er en idealisert modell av de termodynamiske prosessene som foregår i en sylinder i en 4-takts bensinmotor. Sylinder, stempel og ventiler er vist nedenfor:





I *steg 1* suges en blanding av luft og bensindamp inn i sylindere. Når sylindere har sitt største volum V_0 , er vi i tilstand A.

I *steg 2* presses gassen i sylindere sammen. Denne prosessen går så raskt at den er adiabatisk. Når sylindere har sitt minste volum $V_B = \frac{1}{r}V_0$, er vi i tilstand B.

Størrelsen r kalles sylindereens **kompresjonsforhold**.

I *steg 3* antennes gassen med en gnist fra tennpluggen, og store mengder energi frigjøres i form av varme. Dette oppfatter vi som at gassen tilføres en varmemengde Q_H .

Gassen utvides under konstant volum mens både temperatur og trykk øker mye til tilstand C.

I *steg 4* utvides gassen til sylindere opprinnelige volum V_0 i tilstand D. Også denne prosessen går så raskt at den er adiabatisk.

I *steg 5* blåses gassrestene ut av sylindere. Dermed forsvinner også en varmemengde Q_C . Deretter suges ny blanding av luft og bensindamp inn, og vi er igjen i tilstand A.

Selv om kurven til denne prosessen er lukket, så er det ikke helt riktig at prosessen er syklisk. Arbeidssubstansen byttes jo ut for hver runde. Men siden en like stor mengde bensin og luft suges inn i sylindere hver gang, kan vi likevel betrakte prosessen som syklisk.

Vi skal nå se nærmere på de enkelte del-prosessene, og skal deretter beregne virkningsgraden for denne motoren.

Under de adiabatiske prosessene $A \rightarrow B$ og $C \rightarrow D$ har vi:

Prosess $A \rightarrow B$:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_A V_0^{\gamma-1} = T_B \left(\frac{1}{r}V_0\right)^{\gamma-1} = T_B \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1} V_0^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_B = r^{\gamma-1} T_A.$$

Prosess $C \rightarrow D$:

$$T_D V_D^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_D V_0^{\gamma-1} = T_C \left(\frac{1}{r}V_0\right)^{\gamma-1} = T_C \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1} V_0^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_C = r^{\gamma-1} T_D.$$

Så skal vi se på varmen som mottas og som avgis:

$$Q_H = n \cdot c_v (T_C - T_B)$$

$$Q_C = n \cdot c_v (T_A - T_D)$$

Vi ser at Q_H blir positiv, mens Q_C blir negativ. Da vi definerte virkningsgraden for en varmekraftmaskin, forutsatte vi at både Q_H og Q_C skulle være positive. Vi må derfor sette at virkningsgraden for Otto-syklusen er

$$\nu = 1 - \frac{-Q_C}{Q_H} = 1 + \frac{n \cdot c_v (T_A - T_D)}{n \cdot c_v (T_C - T_B)} = 1 + \frac{T_A - T_D}{r^{\gamma-1} T_D - r^{\gamma-1} T_A} = 1 + \frac{T_A - T_D}{r^{\gamma-1} (T_D - T_A)} = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}.$$

Dette uttrykket kan omformes på flere måter. Vi kan for eksempel benytte at:

$$T_B = r^{\gamma-1} T_A \Leftrightarrow r^{\gamma-1} = \frac{T_B}{T_A},$$

$$T_C = r^{\gamma-1} T_D \Leftrightarrow r^{\gamma-1} = \frac{T_C}{T_D}.$$

Da får vi:

$$\text{Virkningsgraden i Otto-syklusen: } \nu = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} = 1 - \frac{T_A}{T_B} = 1 - \frac{T_D}{T_C}$$

Eksempel 11.13.1: For en vanlig bensinmotor kan vi sette $r = 8$ og $\gamma = 1.4$.

- Beregn temperaturen T_B etter sammenpressingen når temperaturen i drivstoffet som kommer inn i sylindern er $T_A = 300 \text{ K}$.
- Beregn virkningsgraden til denne motoren.

Løsning:

- Temperaturen etter sammenpressingen blir

$$T_B = T_A \cdot r^{\gamma-1} = 300 \text{ K} \cdot 8^{1.40-1} \approx \underline{\underline{689 \text{ K}}} = \underline{\underline{416 \text{ }^\circ\text{C}}}.$$
- Virkningsgraden til denne motoren blir

$$\nu = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{8^{1.40-1}} = \underline{\underline{0.56}}.$$

Otto-syklusen er en idealisert modell for en forbrenningsmotor, og virkningsgraden vil i praksis være lavere enn det formelen over tilsier. Modellen antar at bensin/luft blandingen oppfører seg som en ideell gass, den ser bort fra friksjon, fra ufullstendig forbrenning og fra mange andre faktorer som reduserer virkningsgraden. Virkningsgraden for virkelige bensinmotorer er rundt 0.35.

Vi kan øke virkningsgraden ved å øke kompresjonsforholdet r . Men dette vil også øke temperaturen etter den adiabatisk kompresjonen av bensin/luft blandingen. Hvis denne temperaturen er for høy, vil blandingen eksplodere av seg selv. Dette kalles *selvantennelse* og kan skade motoren. *Oktantallet* til bensin er et mål på hvor høyt kompresjonsforhold bensin/luft blandingen tåler uten at det fører til selvantennelse. Det maksimale kompresjonsforholdet for høyoktan bensin er ca. 10.

11.14. Sammendrag.

$$\text{Arbeid: } W = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

Termodynamikkens 1. lov:

$$\Delta Q = \Delta U + W$$

der W regnes positivt når *systemet* utfører arbeid på omgivelsene.

Prosesser:

Isokor: Konstant volum, $W = 0$.

Isobar: Konstant trykk, $W = p \cdot (V_2 - V_1)$.

Isoterm: Konstant temperatur.

Adiabatisk: Ingen varmeutveksling, $\Delta Q = 0$, $\Delta U = -W$.

Kinetisk gassteori:

$$p \cdot V = \frac{2}{3} E_k = \frac{2}{3} N \cdot W_k$$

der $W_k = \frac{1}{2} m v^2$.

For en ideell gass er

$$\Delta U = \frac{3}{2} N k \cdot \Delta T = \frac{3}{2} n R \cdot \Delta T .$$

For en isoterm prosess på ideell gass er

$$\Delta Q = W = n R T \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

For *enhver* ideell gass er

$$c_p = c_v + R .$$

Adiabatkonstanten $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.

For ideelle, *enatomige* gasser er

$$c_v = \frac{3}{2} R, \quad c_p = \frac{5}{2} R .$$

Ved en adiabatisk prosess på en ideell gass er:

$$T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} ,$$

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma ,$$

$$\frac{T_1^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_1} = \frac{T_2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_2}$$

$$W = -\Delta U = n \cdot c_v (T_1 - T_2) = \frac{1}{\gamma-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$$

For enhver syklisk prosess er

$$\Delta U = 0 \Leftrightarrow \Delta Q - W = 0 \Leftrightarrow \Delta Q = W .$$

Virkningsgraden for en varmekraftmaskin:

$$\nu = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H} .$$

Virkningsgraden for en kjølemaskin:

$$\nu = \frac{Q_C}{|W|} .$$

For en Carnot-syklus kjørt som varmekraftmaskin er

$$\nu = \frac{T_H - T_C}{T_H} .$$

Entropiendring: $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$.

For en irreversibel prosess er

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

11.15. Oppgaver.

11.15.1. Småoppgaver i teksten.

Oppgave 11.3.1:

Vi tilfører en varmemengde $\Delta Q = 250\text{J}$ til en gass. Da utvides gassen fra et start-volum $V_1 = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ til et slutt-volum $V_2 = 6.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Under hele oppvarmingen har trykket vært konstant $p = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Hvor mye har den indre energien økt ved oppvarmingen?

Oppgave 11.5.1:

Bruk resultatene fra den kinetiske gassteorien til å finne gjennomsnittsfarten til et O_2 -molekyl når temperaturen er 20°C .

Oppgave 11.6.1:

En gass utvides fra en start-tilstand gitt ved (p_0, V_0) til en slutt-tilstand der volumet er $V_1 = 2V_0$. Beregn det arbeidet som gassen utfører på omgivelsene når:

- Utvidelsen skjer mens trykket holdes konstant.
- Utvidelsen skjer mens temperaturen holdes konstant.

Svarene skal uttrykkes ved p_0 og V_0 .

Oppgave 11.6.2:

Vi har en 10 liter av en gass innestengt i en beholder med et stempel som kan gli uten friksjon. Hvor mye varme må vi tilføre for å doble trykket mens temperaturen er konstant?

Oppgave 11.7.1:

En ideell, enatomig gass varmes opp under konstant trykk p_0 slik at volumet øker fra V_1 til V_2 . Vis at det da må tilføres en varmemengde $Q = \frac{3}{2} p_0 (V_2 - V_1)$.

Oppgave 11.7.2:

Vi har 4.0 mol av en ideell gass som ikke er enatomig. Vi varmer opp gassen fra 300K til 360K under konstant volum, og må da tilføre $5.00 \cdot 10^3 \text{ J}$.

- Finn den molare varmekapasiteten c_v ved oppvarming under konstant volum.
- Hvor mye varme må vi tilføre for å varme opp denne gassen fra 300K til 360K når trykket skal holdes konstant?

Oppgave 11.8.1:

Et fryseanlegg benytter ammoniakk (som har adiabatkonstant $\gamma = 1.3$) som kjølemedium. I en sylinder med volum V_0 er det avstengt ammoniakkgass med trykk $p_0 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ og temperatur $T_0 = 27^\circ\text{C}$. Gassen utvides adiabatisk inntil temperaturen i gassen blir -33°C .

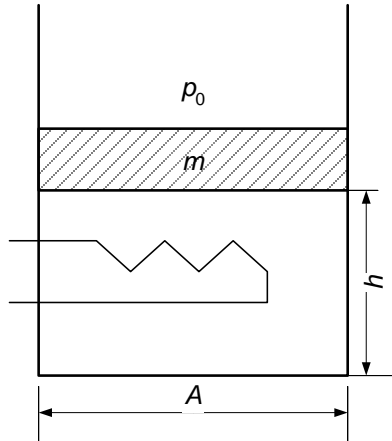
Anta at ammoniakkgass oppfører seg som en ideell gass. Gasskonstanten $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

- Finn volumet (uttrykt ved V_0) og trykket i gassen etter utvidelsen.

- b) Hvor stor er endringen i indre energi for ett mol ammoniakk-gass ved en slik prosess?

11.15.2. Blandede oppgaver.

Oppgave 11.1:

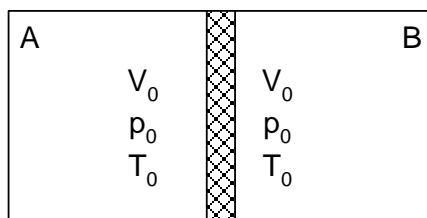


Figuren viser en sylindrisk gassbeholder som står med horisontal bunn og vertikale sidevegger. Sylinderens tverrsnittsareal er $A = 0.0100 \text{ m}^2$. En gass som vi antar oppfører seg som en ideell gass er avstengt under et stempel som har massen $m = 5.00 \text{ kg}$. Vi skal anta at stempelet slutter helt tett til veggene, at det hele tiden holder seg horisontalt og at det kan gli mot sideveggene uten friksjon. Gassen kan varmes opp ved hjelp av en varmetråd, men er ellers termisk isolert fra omgivelsene. Se bort fra oppvarming av beholder og stempel.

Luftrykket over stempelet er $p_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

- I start-tilstanden er temperaturen i gassen 0°C , og stempelet står en høyde $h_1 = 0.500 \text{ m}$ over sylinderens bunn. Finn trykket og antall mol i den avstengte gassen.
- Gassen varmes opp inntil stempelet står en høyde $h_2 = 0.628 \text{ m}$ over sylinderens bunn. Finn temperaturen i gassen nå. Hvor stort arbeid er utført under denne prosessen?
- Under oppvarmingen ble gassen tilført en varmemengde $Q = 475 \text{ J}$. Bestem gassens molare varmekapasiteter ved konstant trykk og ved konstant volum, og vis at adiabatkonstanten for gassen blir $\gamma = 1.40$.
- Gassen presses sammen fra $h_2 = 0.628 \text{ m}$ tilbake til $h_3 = h_1 = 0.500 \text{ m}$ i en adiabatisk prosess. Bestem gassens temperatur og trykk i denne siste tilstanden. Finn også det arbeidet som må til under sammenpressingen.

Oppgave 11.2:



En gassbeholder er delt i to deler A og B av et tett-sluttende stempel som kan forskyves uten friksjon. I utgangspunktet har begge delene like stort volum V_0 . I begge delene er det avstengt en enatomig ideell gass med samme trykk p_0 og samme temperatur T_0 .

Gassens molare varmekapasitet ved konstant volum er $c_V = \frac{3}{2}R$.

Gassen i A varmes opp, mens gassen i B holdes på konstant temperatur T_0 . Trykket er hele tiden like stort i B som i A fordi stempelet parallellforskyves uten friksjon.

- Hvor stort er trykket når $V_A = \frac{5}{4}V_0$?

Hvor høy er da temperaturen i A?

- b) Beregn tilført / avgitt varme, tilført / utført arbeid og endring i indre energi for hver av de to gassmengdene under denne prosessen.

Oppgave 11.3:

I en beholder er 50 mol luft avstengt av et stempel som kan bevege seg uten friksjon. Vi forutsetter at luften er en ideell gass med adiabatkonstant $\gamma = 1.40$. I starten er trykket i beholderen $p_0 = 1.04 \cdot 10^5$ Pa og temperaturen er 27°C .

- a) Vis at startvolumet er 1.20 m^3 .
- b) Gassen presses sammen til et volum på 1.00 m^3 mens temperaturen i gassen holdes konstant.
- 1) Hvor stort er trykket i gassen etter sammenpressingen?
 - 2) Hvor mye varme må tilføres til eller fjernes fra gassen under denne prosessen?
- c) Fra tilstanden i b) utvides gassen adiabatisk slik at trykket igjen blir $p_0 = 1.04 \cdot 10^5$ Pa.
- 1) Finn gassens volum og temperatur etter denne utvidelsen.
 - 2) Hvor stort arbeid utfører gassen under denne utvidelsen?

Oppgave 11.4:

En ideell gass har molar varmekapasitet ved konstant volum $C_V = \frac{3}{2}R$ og adiabatkonstant $\gamma = \frac{5}{3}$. Gassen går gjennom en syklus slik:

- Den starter i A med temperatur $T_A = T_0$, volum $V_A = V_0$ og trykk $p_A = p_0$.
- Deretter føres gassen under konstant trykk til en tilstand B der volumet er $V_B = \frac{5}{4}V_0$.
- Fra B føres gassen adiabatisk til en tilstand C der volumet er $V_C = 2V_0$.
- Derfra føres gassen ved konstant temperatur til en tilstand D der volumet er $V_D = V_0$.
- Til slutt føres gassen tilbake til A under konstant volum.

- a) Tegn inn syklusen i et pV -diagram.
Beregn temperaturen i B uttrykt ved T_0 .
Vis at temperaturen i C er $T_C \approx 0.914T_0$, og finn trykket i C uttrykt ved p_0 .
Finn trykket i D uttrykt ved p_0 .
- b) Beregn det netto arbeidet som gassen utfører på omgivelsene under denne syklusen.
Svaret skal uttrykkes ved p_0 og V_0 .

Oppgave 11.5:

En toatomig ideell gass har molar varmekapasitet ved konstant volum $C_V = \frac{5}{2}R$ og adiabatkonstant $\gamma = \frac{7}{5}$. I en starttilstand A har denne gassen trykk $p_A = p_0$, volum $V_A = V_0$ og temperatur $T_A = T_0$. Gassen går nå gjennom denne syklusen:

1. Gassen presses først sammen isotermt til en tilstand B der volumet er $V_B = \frac{1}{3}V_0$.

2. Deretter utvides gassen adiabatisk til en tilstand C der volumet er $V_C = V_0$.
 3. Til slutt føres gassen tilbake til tilstand A mens volumet holdes konstant.
- a) Tegn inn denne syklusen i et pV -diagram.
 - b)
 - 1) Finn trykket p_B i tilstand B.
 - 2) Beregn det arbeidet som gassen utfører og den varmen som gassen tilføres under prosessen $A \rightarrow B$.
 - c)
 - 1) Finn temperaturen T_C og trykket p_C i tilstand C.
 - 2) Beregn det arbeidet som gassen utfører og den varmen som gassen tilføres under prosessen $B \rightarrow C$.
 - d) Beregn det arbeidet som gassen utfører og den varmen som gassen tilføres under prosessen $C \rightarrow A$.

Oppgave 11.6:

En ideell gass med adiabatkonstant $\gamma = \frac{5}{3}$ starter i en tilstand A med volum $V_A = V_0$, trykk $p_A = p_0$ og temperatur $T_A = T_0$.

- a) Gassen varmes opp under konstant volum til en ny tilstand B der $p_B = \frac{3}{2}p_0$. Deretter føres gassen isotermt til en tilstand C der $V_C = 2V_0$.
 - 1) Tegn inn prosessene i et pV -diagram, og finn gassens temperatur og trykk i C uttrykt ved henholdsvis T_0 og p_0 .
 - 2) Hvor mye varme må gassen tilføres når den går fra A via B til C? Svaret skal uttrykkes ved p_0 og V_0 .
- b) Gassen starter på ny i tilstand A, men føres nå først under konstant trykk til en tilstand D og deretter adiabatisk til samme tilstand C som før.
 - 1) Finn gassens temperatur og volum i D uttrykt ved henholdsvis T_0 og V_0 .
 - 2) Hvor mye arbeid utfører gassen når den går fra A via D til C? Svaret skal uttrykkes ved p_0 og V_0 .

Oppgave 11.7:

En ideell gass med adiabatkonstant $\gamma = \frac{7}{5}$ og molar varmekapasitet ved konstant volum $c_V = \frac{5}{2}R$ starter i en tilstand der volumet er V_0 , trykket er p_0 og temperaturen er T_0 . Gassen gjennomgår en syklus der den først utvides adiabatisk til et nytt volum $V_1 = 3V_0$, varmes deretter opp under konstant volum, og føres til slutt isotermt tilbake til starttilstanden.

- a) Tegn inn syklusen i et pV -diagram, og avgjør om dette kan være syklusen til en varmekraft- eller en kjølemaskin.
- b) Bestem trykk og temperatur i de to ukjente tilstandene.

c) Beregn utført arbeid og tilført varme under hver av de tre delprosessene.

Oppgave 11.8:

I en Carnotmaskin gjennomfører 0.500 mol av en ideell toatomig gass med adiabatkonstant $\gamma = 1.40$ en Carnot-syklus mellom temperaturene $T_H = 520\text{K}$ og $T_C = 300\text{K}$. Prosessen går via de fire tilstandene a , b , c og d . Syklusen er som følger:

- $a \rightarrow b$: Gassen utvides isotermt.
- $b \rightarrow c$: Gassen utvides adiabatisk.
- $c \rightarrow d$: Gassen komprimeres isotermt.
- $d \rightarrow a$: Gassen komprimeres adiabatisk.

Vi får vite at $T_a = 520\text{K}$, $p_a = 11.0 \cdot 10^5 \text{Pa}$ og at i løpet av den isoterme utvidelsen doubles volumet. Finn de ukjente trykkene, temperaturene og volumene i tilstandene a , b , c og d .

11.15.3. Løsning på småoppgaver.

Oppgave 11.3.1:

Siden trykket er konstant, utfører gassen et arbeid

$$W = p(V_2 - V_1) = 1.0 \cdot 10^5 \text{Pa} \cdot (6.0 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 - 5.0 \cdot 10^{-3} \text{m}^3) = \underline{100\text{J}}.$$

Da blir endringen i indre energi

$$\Delta U = \Delta Q - W = 250\text{J} - 100\text{J} = \underline{\underline{150\text{J}}}.$$

Oppgave 11.5.1:

Molmassen til O_2 er $2 \cdot 16 = 32$, slik at massen til et slikt molekyl er

$$m = 32 \cdot u = 32 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{kg} = 5.31 \cdot 10^{-26} \text{kg}.$$

Fra den kinetiske gassteorien har vi at den kinetiske energien til et slikt molekyl er

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \text{J/K} \cdot 293 \text{K}}{5.31 \cdot 10^{-26} \text{kg}}} = \underline{\underline{478\text{m/s}}}.$$

Oppgave 11.6.1:

a) Når gassen utvides under konstant trykk, er arbeidet

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p dV = p_0 \int_{V_0}^{2V_0} dV = p_0 [V]_{V_0}^{2V_0} = p_0 (2V_0 - V_0) = \underline{\underline{p_0 V_0}}.$$

b) Når gassen utvides mens temperaturen holdes konstant, må vi finne trykket som en funksjon av volumet:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T} \Leftrightarrow p = \frac{p_0 V_0}{V}.$$

Da blir arbeidet

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0}^{V_1} p dV = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{p_0 V_0}{V} dV = p_0 V_0 \int_{V_0}^{2V_0} \frac{dV}{V} = p_0 V_0 [\ln V]_{V_0}^{2V_0} = p_0 V_0 (\ln(2V_0) - \ln(V_0)) \\ &= p_0 V_0 \ln\left(\frac{2V_0}{V_0}\right) = \underline{\underline{p_0 V_0 \ln 2}} \approx \underline{\underline{0.693 p_0 V_0}} \end{aligned}$$

Oppgave 11.6.2:

Her er det enklest å benytte at

$$Q = W = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = p_1 V_1 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = (1.03 \cdot 10^5 \text{ Pa}) \cdot (10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) \cdot \ln\left(\frac{p_1}{2p_1}\right)$$

$$= 1.03 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{-1.03 \cdot \ln 2 \cdot 10^3 \text{ J} \approx -714 \text{ J}}}$$

Minustegnet angir at når trykket øker mens temperaturen holdes konstant, må volumet avta. Gassen presses altså sammen. Da må vi *tilføre* arbeid, noe som fører til at gassen må *avgi* varme.

Oppgave 11.7.1:

Den tilførte varmemengden Q går kun med til å øke gassens indre energi. Da er

$$Q = \Delta U = c_v \cdot n \cdot (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} R \cdot n \cdot T_2 - \frac{3}{2} R \cdot n \cdot T_1 = \frac{3}{2} p_0 V_2 - \frac{3}{2} p_0 V_1 = \underline{\underline{\frac{3}{2} p_0 (V_2 - V_1)}}.$$

Oppgave 11.7.2:

a) Den tilførte varmemengden ved oppvarming under konstant volum er

$$Q_v = n \cdot c_v \cdot \Delta T \Leftrightarrow c_v = \frac{Q_v}{n \cdot \Delta T} = \frac{5000 \text{ J}}{4 \cdot (360 - 300) \text{ K}} = \underline{\underline{20.8 \text{ J/K}}}.$$

b) Når oppvarmingen skjer under konstant trykk, er

$$Q_p = n \cdot c_p \cdot \Delta T = n \cdot (c_v + R) \cdot \Delta T = 4.0 \cdot (20.8 + 8.31) \text{ J/K} \cdot 60 \text{ K} = \underline{\underline{7.00 \cdot 10^3 \text{ J}}}.$$

Oppgave 11.8.1:

a) Ved en adiabatisk tilstandsforandring er

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \Leftrightarrow \frac{T_0}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow \frac{(273+27) \text{ K}}{(273-33) \text{ K}} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{1.3-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{0.3} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_0} = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{0.3}} = 2.1 \Leftrightarrow V_1 = \underline{\underline{2.1V_0}}$$

Da finner vi trykket av tilstandslikningen:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \Leftrightarrow p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0} \cdot \frac{V_0}{V_1} = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \frac{240 \text{ K}}{300 \text{ K}} \cdot \frac{V_0}{2.1V_0} = \underline{\underline{0.38 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}.$$

Alternativ:

$$p_1 V_1^\gamma = p_0 V_0^\gamma \Leftrightarrow p_1 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \left(\frac{V_0}{2.1V_0}\right)^{1.3} = \underline{\underline{0.38 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}.$$

b) Siden det ikke er varmeutveksling ved en adiabatisk prosess, er endringen i indre energi

$$\Delta U = -W = -\frac{1}{\gamma-1} (p_0 V_0 - p_1 V_1) = \frac{1}{\gamma-1} (nRT_1 - nRT_0) = \frac{nR}{\gamma-1} (T_1 - T_0)$$

$$= \frac{1 \cdot 8.31 \text{ J/K}}{1.3-1} (240 \text{ K} - 300 \text{ K}) = \underline{\underline{-1660 \text{ J}}}$$

11.15.4. Svar på blandede oppgaver.

Oppgave 11.1:

$$p = 1.062 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad n = 0.234 \text{ mol}, \quad T_2 = 343 \text{ K}, \quad W = 136 \text{ J}, \quad c_p = 29.0 \text{ J/K}, \quad c_v = 20.7 \text{ J/K}, \\ \gamma = 1.40, \quad T_3 = 375.7 \text{ K}, \quad p_3 = 1.46 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad W = 158.4 \text{ J}.$$

Oppgave 11.2:

$$p_1 = \frac{4}{3} p_0, \quad T_A = \frac{5}{3} T_0, \quad W_A = -W_B = p_0 V_0 \ln\left(\frac{4}{3}\right), \quad \Delta U_B = 0, \quad \Delta U_A = nRT_0 = p_0 V_0, \\ Q_A = p_0 V_0 \left(1 + \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right), \quad Q_B = -p_0 V_0 \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Oppgave 11.3:

$$V_0 = 1.20 \text{ m}^3, \quad p_1 = 1.25 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad W = -2.27 \cdot 10^4 \text{ J}, \quad V_2 = 1.14 \text{ m}^3, \quad T_2 = 285 \text{ K}, \\ W = 1.61 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Oppgave 11.4:

$$T_B = \frac{5}{4} T_0, \quad T_C \approx 0.914 T_0, \quad p_C = 0.457 p_0, \quad p_D = 0.914 p_0, \quad W = 0.120 p_0 V_0.$$

Oppgave 11.5:

$$p_B = 3 p_0, \quad \Delta Q_{AB} = -\ln 3 \cdot p_0 V_0, \quad p_C \approx 0.644 p_0, \quad T_C \approx 0.644 T_0, \quad W_{BC} = \Delta Q_{CA} \approx 0.889 p_0 V_0.$$

Oppgave 11.6:

$$T_C = \frac{3}{2} T_0, \quad p_C = \frac{3}{4} p_0, \quad \Delta Q = \frac{3}{4} (1 + 2 \ln 2) p_0 V_0, \quad V_D \approx 1.68 V_0, \quad T_D \approx 1.68 T_0, \quad W \approx 0.95 p_0 V_0.$$

Oppgave 11.7:

$$p_B \approx 0.215 p_0, \quad T_B \approx 0.645 T_0, \quad V_C = 3 V_0, \quad p_C = \frac{1}{3} p_0, \quad Q_{AB} = 0, \quad W_{AB} = Q_{BC} \approx 0.888 p_0 V_0, \\ Q_{CA} = -p_0 V_0 \ln 3.$$

Oppgave 11.8:

$$V_a = 0.00197 \text{ m}^3, \quad V_b = 0.00394 \text{ m}^3, \quad p_b = 5.49 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad V_c = 0.0156 \text{ m}^3, \quad V_d = 0.00779 \text{ m}^3, \\ p_d = 1.60 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$