

10. Termiske egenskaper.

Mange av de mest epokegjørende oppdagelsene og oppfinnelsene i menneskehetens historie er knyttet til ild og varme. Bare tenk på hvor viktig det var for våre huleboende forfedre å kunne tenne opp et leirbål. Bruk av ild var ganske sikkert en medvirkende årsak til at arten Homo Sapiens etter hvert dominerte nesten hele jordkloden.

Utviklingen av dagens velferdssamfunn startet med at dampmaskiner overtok mye av det tunge slitet, og damplokomotiv revolusjonerte transporten. Dette dannet grunnlaget for den industrielle revolusjon og den velstand som vi opplever i dag. Vi er blitt helt avhengige av forbrenningsmotorer og kjøleanlegg. All kunnskap om slikt utstyr baserer seg på termisk fysikk.

Men vi er også blitt oppmerksomme på at vi er i ferd med å øke temperaturen på jordoverflaten i urovekkende grad. Vi er helt avhengige av klimamodeller for å forstå hvorfor det skjer, og treffe mottiltak. Også denne kunnskapen bygger på termisk fysikk.

Du innser sikkert at varmelære er et svært viktig fagfelt som har betydning på mange områder. I dette og de neste kapitlene blir det dessverre bare plass til en overfladisk gjennomgang av noen grunnleggende egenskaper. Men denne innføringen får danne et grunnlag for videre studier.

10.1. Temperaturmåling.

Vi definerer noen viktige begrep, og prøver å måle temperatur.

10.1.1. Vårt første termometer. Vi lager et primitivt termometer.

10.1.2. Gasstermometeret. Vi lager et bedre termometer basert på en ideell gass.

10.2. Gasser.

Nå viderefører vi arbeidet med å lage et gasstermometer.

10.2.1. Egenskaper ved gasser. Litt kjemi og noen "intelligente gjetninger".

10.2.2. Tilstandslikningen for en ideell gass. Denne må du kunne!

*10.2.3. Reelle gasser. Vi må nok justere våre antakelser om gassers egenskaper litt.

10.2.4. Grafisk framstilling av tilstandslikningen. Dette får du bruk for senere.

10.3. Termisk utvidelse.

10.3.1. Lineær utvidelse.

10.3.2. Volumutvidelse.

*10.3.3. Termisk spenning.

10.4. Varmeoverføring.

Hvordan kan varme overføres fra ett legeme til et annet, eller fra ett sted til et annet?

10.4.1. Innledning. Noen innledende definisjoner.

10.4.2. Varmeledning. Varmetransport gjennom ei plate.

*10.4.3. Varmestrøm gjennom flerlags plater.

10.4.4. Konveksjon. Varmetransport gjennom sjikt inntil plata.

*10.4.5. Kombinasjon av varmeledning og konveksjon.

10.4.6. Varmestråling. Elektromagnetisk stråling (for eksempel solstråling).

10.5. Varmekapasiteter, overgangsvarme og kalorimetri.

Nå skal vi betrakte varme som en energiform, og måle denne energien.

10.5.1. Innledning. Hva skjer når et stoff tilføres varme?

10.5.2. Varmekapasiteter. Hvor mye energi kan et legeme lagre?

10.5.3. Spesifikk overgangsvarme. Smelting og fordamping.

10.5.4. Kalorimetri. Måling av energioverganger.

10.6. Sammendrag.

10.7. Oppgaver med løsningsforslag.

10.7.1. Småoppgaver i teksten.

10.7.2. Blandede oppgaver.

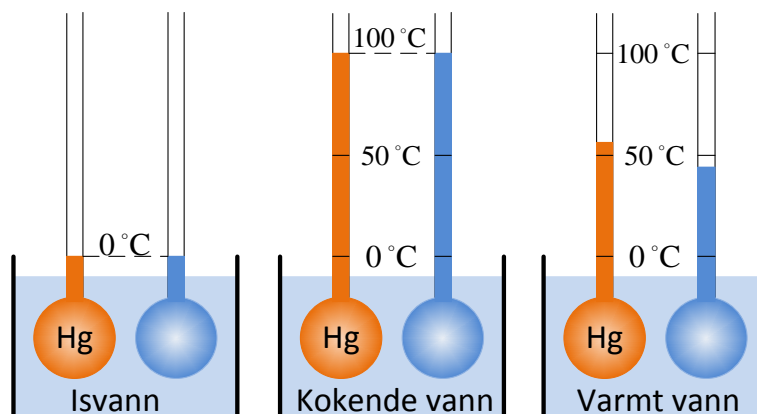
10.7.3. Løsninger på småoppgaver.

10.7.4. Svar på blendede oppgaver.

10.1. Temperaturmåling.

10.1.1. Vårt første termometer.

Vi vet av erfaring at alt stoff påvirkes av temperaturen. Vann, for eksempel, går over fra fast form via flytende form til gassform (damp) når temperaturen øker. Volumet av faste stoffer, væsker og gasser avhenger av temperaturen. Slike termiske endringer må kunne brukes til å lage en temperaturskala og måle temperatur.



Vår tradisjonelle Celsius-skala bygger på to *fikspunkter*: vannets frysepunkt (smeltepunkt) og vannets kokepunkt. Temperaturen ved frysepunktet ble satt til 0°C , og ved kokepunktet til 100°C . Figuren over viser hvordan vi i prinsippet kan gå fram for å lage et slikt termometer. Figuren viser også en av de alvorligste svakhetene ved dette termometeret.

En kolbe er fylt med kvikksølv (Hg) og er forbundet med et tynt, jamtykt glassrør slik at kvikksølvet står litt opp i glassrøret når kolben og glassrøret befinner seg i en blanding av is og vann (vannets frysepunkt). Vi merker av hvor høyt kvikksølvsøylen nå står i glassrøret, og merker av for 0°C . Så flytter vi kolben over i kokende vann (vannets kokepunkt), og merker av for 100°C der kvikksølvsøylen nå står når det blitt termisk likevekt. Området mellom deles inn i 100 like store deler, der hver del blir 1°C .

Dersom vi på samme måte vil lage et termometer basert på et annet stoff enn Hg, for eksempel sprit, viser det seg at de to termometrene viser litt forskjellige verdier mellom fikspunktene. Grunnen er at stoffene ikke utvider seg helt "i takt".

En slik temperaturskala har klare ulemper:

- Både frysepunkt og kokepunkt varierer litt med trykket, og må derfor spesifiseres nærmere.
- Skalaen er lite brukbar utenfor området fra 0°C til 100°C .
- Dersom vi vil benytte andre væsker enn kvikksølv i våre termometre, får vi litt forskjellige verdier for temperaturer utenom fikspunktene.

Vi må nok lage oss en bedre temperaturskala dersom vi skal måle temperaturer over et stort område med stor nøyaktighet.

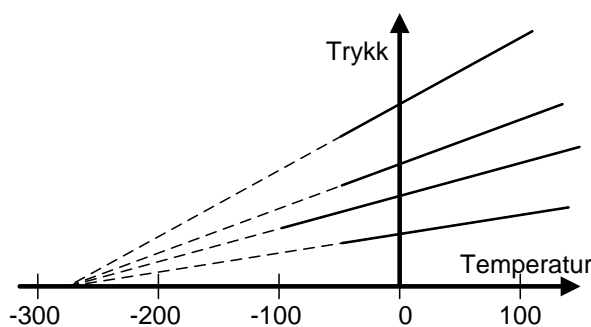
10.1.2. Gasstermometeret.

Da vi laget vårt første termometer, baserte vi oss på termisk utvidelse av en væske (flytende kvikksølv, sprit eller liknende). Det viser seg å være lurere å basere seg på termisk utvidelse av en *gass*, spesielt dersom vi bruker en edelgass ved lavt trykk. Vi utfører da en serie eksperimenter der et *konstant volum* av en gass varmes opp, og vi registrerer *trykket* p ved ulike temperaturer. Som før tar vi utgangspunkt i vannets smeltepunkt (frysepunkt) og vannets kokepunkt, og lar disse temperaturene være henholdsvis $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ og $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Så lager vi en temperaturskala ved å anta en *lineær* sammenheng mellom trykk og temperatur.

Når vi gjennomfører slike forsøk med edelgasser under svært lavt trykk, oppdager vi to meget nyttige ting:

- Temperaturskalaene for slike *gasstermometre* blir like uansett hvilke gasser vi bruker.
- Dersom vi forlenger den lineære sammenhengen mellom trykk og temperatur inntil linja skjærer temperaturaksen, vil linja alltid skjære temperaturaksen på $-273.15\text{ }^{\circ}\text{C}$ uansett hvilken gass vi bruker.

Dette er illustrert på figuren nedenfor.



Nå har vi funnet et naturlig nullpunkt for en temperaturskala som vi kaller *Kelvin-skalaen*. Vi har definert enheten på denne skalaen slik at en temperaturendring på 1 K skal svare til $1\text{ }^{\circ}\text{C}$. Da får vi at nullpunktet på Kelvin-skalaen faller på $-273.15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Dette fører til:

Dersom vi kaller temperaturen målt i grader Celsius for T_C , og temperaturen målt i Kelvin for T , så er

$$T = T_C + 273.15.$$

Oftest bryr vi oss ikke om desimalene, og setter $T = T_C + 273$.

Merk at vi bruker 1 K, ikke 1°K .

Da vi definerte vår første temperaturskala, benyttet vi *to* fikspunkter. Med Kelvin-skalaen trenger vi bare *ett* fikspunkt. Vi har allerede definert et nullpunkt. Videre bruker vi vannets trippelpunkt (den tilstanden der is, vann og vanndamp kan eksistere sammen stabilt) som

fikspunkt, og *definerer* at temperaturen der skal være 0.01°C , eller 273.16K . Dermed er Kelvin-skalaen entydig definert. Rent formelt kan vi skrive denne definisjonen slik:

Dersom en enatomig gass har trykket p ved en temperatur T , og trykket p_3 og temperaturen $T_3 = 273.16^{\circ}\text{C}$ ved vannets trippelpunkt, er

$$\frac{p}{T} = \frac{p_3}{T_3} \Leftrightarrow T = \frac{p}{p_3} \cdot T_3 = \frac{p}{p_3} \cdot 273.16\text{K}.$$

Strengt tatt burde vi skrive

$$T = \left(\lim_{p_3 \rightarrow 0} \frac{p}{p_3} \right) \cdot 273.16\text{K}$$

fordi målingene skal gjennomføres under svært lavt trykk.

10.2. Gasser.

10.2.1. Egenskaper ved gasser.

En *gass* kjennetegnes bl.a. av at den ikke har noe fast volum. Dette forklarer vi ved at gassen består av molekyler som er så svakt bundet til hverandre at de kan bre seg i hele det tilgjengelige rommet. Vi skal også anta at molekylene er så små at volumet av molekylene er neglisjerbart sammenliknet med det volumet som gassen befinner seg i. Disse betingelsene er oppfylt for edelgasser under svært lavt trykk.

Vi skal senere sette opp flere og mer detaljerte krav til en *ideell gass*.

Nå må vi rippe opp i kjemi-kunnskapene dine. Kjemikerne angir ikke molekulmasser i kg. De bruker helst *atommasse-enheter*, forkortet *u*. Enheten $1u$ er definert som $\frac{1}{12}$ av massen til ett atom av karbon-isotopen C^{12} . Nøyaktige målinger viser at $1u = 1.6605388 \cdot 10^{-27} \text{kg}$.

Kjemiske tabeller oppgir atom-masser i *u*. Massen til *molekyler* finner vi ved å legge sammen massene til de atomene som inngår i molekylet. Det tallet som da framkommer, kaller vi *stoffets molare masse* eller kortere *molmasse*, og vi gir det symbolet *M*.

Avogadros tall N_A er definert som antall molekyler i nøyaktig 12 gram C^{12} . Siden massen til hvert av disse atomene er $12u = 12 \cdot 1.6605388 \cdot 10^{-27} \text{kg}$, får vi at

$$N_A \cdot 12u = 12.000000 \cdot 10^{-3} \text{kg} \Leftrightarrow N_A = \frac{12.000000 \cdot 10^{-3} \text{kg}}{12 \cdot 1.6605388 \cdot 10^{-27} \text{kg}} = \underline{\underline{6.0221218 \cdot 10^{23}}}.$$

Dette antallet kaller vi **1 mol**. Når *M* er molmassen til et stoff, vil *M* gram av stoffet inneholde nøyaktig 1 mol molekyler.

Nå kan vi nøste opp noen sammenhenger:

Dersom vi har en masse m (målt i gram) av et stoff som har molmasse M , vil

$$n = \frac{m}{M}$$

være antall mol av stoffet.

Når N_A er Avogadros tall, blir antall molekyler N i n mol av stoffet

$$N = n \cdot N_A.$$

Eksempel 10.2.1: Omtrent hvor mange mol og hvor mange molekyler har vi i 100 gram CO_2 når atommassen til O er 16.00, mens atommassen til C er 12.01?

Løsning: Først en liten merknad: Atommassen til C er 12.01 og ikke 12.00 som vi skulle vente fordi naturlig karbon også inneholder isotopene C^{13} og C^{14} . Tabellene gir et veid gjennomsnitt av disse isotopene. Molekylmassen til CO_2 blir derfor

$$M = 12.01 + 2 \cdot 16.00 = 44.01$$

slik at antall mol blir omtrent

$$n = \frac{100 \text{ gram}}{44.01 \text{ gram}} = \underline{\underline{2.272}}.$$

Antall molekyler blir da omtrent

$$N = N_A \cdot n = 6.022 \cdot 10^{23} \cdot 2.272 = \underline{\underline{1.368 \cdot 10^{24}}}.$$

Oppgave [10.2.1](#).

10.2.2. Tilstandslikningen for en ideell gass.

Vi har allerede definert temperaturskalaen (Kelvin-skalaen) slik at den absolutte temperaturen er proporsjonal med trykket:

$$p = \text{konst.} \cdot T.$$

Vi antar at gasser består av molekyler som farer omkring i hele det tilgjengelige rommet. Det er da rimelig å anta at trykket i gassen har sammenheng med at disse molekylene kolliderer med veggene i beholderen. Trykket bør da øke når molekyltettheten øker. Mer presist: Vi gjetter på at trykket er proporsjonalt med antall molekyler pr. volumenhet. Når vi kombinerer dette med at trykket er proporsjonalt med temperaturen målt i Kelvin, er det nærliggende å anta at det må eksistere en konstant k slik at

$$p = k \cdot \frac{N}{V} \cdot T \quad \Leftrightarrow \quad p \cdot V = N \cdot k \cdot T$$

der N er antall molekyler i volumet V .

Vanligvis er det enklere å regne med antall mol n enn med antall molekyler N . Vi innfører derfor at $N = n \cdot N_A$, og får

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T = (n \cdot N_A) \cdot k \cdot T = n \cdot R \cdot T$$

der $R = N_A \cdot k$.

De sammenhengene som vi har "gjettet" oss fram til, må naturligvis etterprøves eksperimentelt. Da viser det seg heldigvis at vi har gjettet riktig, i alle fall så lenge våre forutsetninger om edelgass under svært lavt trykk er gyldig. Vi kan også bruke slike eksperimenter til å finne verdier av konstantene k og R . Da viser det seg også at verdiene av k og R ikke avhenger av hvilken gass vi bruker. De er *universelle konstanter*.

Men eksperimentene viser også at resultatene ovenfor ikke gjelder eksakt dersom vi bruker andre gasser enn edelgasser under lavt trykk. Gasser der resultatene gjelder, kaller vi *ideelle gasser*.

Vi summerer opp:

Når n mol eller N molekyler av en *ideell gass* har trykk p , volum V og temperatur T målt i Kelvin, er

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T = N \cdot k \cdot T$$

der

- $R = 8.314 \text{ J/K}$ kalles *gasskonstanten*.
- $k = \frac{R}{N_A} = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ kalles *Boltzmanns konstant*.

Dersom vi har en *avgrenset* gasmengde på n mol (eller N molekyler) som går fra en tilstand gitt ved p_1 , V_1 og T_1 til en ny tilstand gitt ved p_2 , V_2 og T_2 , har vi at:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = nR = Nk.$$

Noen ganger kan det være nyttig å innføre massetettheten

$$\rho = \frac{m}{V}$$

i tilstandslikningen. Da benytter vi at

$$n = \frac{m}{M},$$

og får

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \Leftrightarrow p \cdot M = \frac{m}{V} \cdot R \cdot T = \rho \cdot R \cdot T.$$

Eksempel 10.2.2: Vi sier at en gass har *standard temperatur og trykk* (stp) dersom gassen har trykk 1atmosfære = $1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ og temperatur $0^\circ\text{C} = 273.15 \text{ K}$. Hvor stort volum har ett mol av en ideell gass ved stp?

Løsning: Fra tilstandslikningen for en ideell gass får vi at

$$pV = nRT \Leftrightarrow V = \frac{nRT}{p} = \frac{1 \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot 273.15 \text{ K}}{1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = \underline{\underline{0.0224 \text{ m}^3}}.$$

Eksempel 10.2.3: I en beholder har vi en ideell gass der overtrykket er 2.2 atmosfærer når temperaturen er 10°C. Hvor stort er overtrykket når temperaturen er 40°C? Beholderens volum endres ikke ved oppvarmingen.

Løsning: Av tilstandslikningen får vi

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Leftrightarrow p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = \frac{273.15 \text{ K} + 40 \text{ K}}{273.15 \text{ K} + 10 \text{ K}} \cdot (2.2 + 1.0) \text{ atm} = \underline{\underline{3.54 \text{ atm}}}.$$

Overtrykket blir derfor

$$\underline{\underline{3.54 \text{ atm}}} - 1.000 \text{ atm} = \underline{\underline{2.54 \text{ atm}}}.$$

Merk at det ikke er nødvendig å regne om trykket til Pascal fordi omregningsfaktoren forkortes bort.

Eksempel 10.2.4: En dykkerflaske har volum $11.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Når flasken er "tom", inneholder den luft med temperatur 21°C og 1.00 atmosfæres trykk. En kompressor fyller flasken med luft med temperatur 42°C og et overtrykk på $2.10 \cdot 10^7 \text{ Pa}$. Hvor mange kg luft er da fylt på den fulle dykkerflasken? Anta at luft har den molare massen $M = 28.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$.

Løsning: Antall mol i en "tom" dykkerflaske er gitt ved

$$p_1 V_1 = n_1 R_1 T_1 \Leftrightarrow n_1 = \frac{p_1 V_1}{R_1 T_1} = \frac{1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 11.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{8.314 \text{ J/K} \cdot 294.15 \text{ K}} = \underline{\underline{0.456}}.$$

Antall mol i en full dykkerflaske er gitt ved

$$p_2 V_2 = n_2 R_2 T_2 \Leftrightarrow n_2 = \frac{p_2 V_2}{R_2 T_2} = \frac{(1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} + 2.10 \cdot 10^7 \text{ Pa}) \cdot 11.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{8.314 \text{ J/K} \cdot 315.15 \text{ K}} = \underline{\underline{88.588}}.$$

Da er det tilført

$$\Delta n = n_2 - n_1 = 88.588 - 0.456 = \underline{\underline{88.132}} \text{ mol}.$$

Dette tilsvarer massen

$$m = \Delta n \cdot M = 88.132 \cdot 28.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = \underline{\underline{2.54 \text{ kg}}}.$$

Opgaver: [10.2.2](#), [10.2.3](#), [10.2.4](#).

*10.2.3. Reelle gasser.

Den tilstandslikningen som vi presenterte ovenfor gjelder kun for ideelle gasser. For reelle gasser bør den modifiseres. Det er laget mange forskjellige tilstandslikninger for reelle gasser. Den mest brukte er *Van der Waals likning*, som ser slik ut:

$$\left(p + a \cdot \frac{n^2}{V^2} \right) \cdot (V - nb) = nRT .$$

Her er a og b konstanter som må bestemmes eksperimentelt, og som varierer fra gass til gass. F.eks. er $a = 0.364 \text{ J} \cdot \text{m}^3 / \text{mol}^2$ og $b = 4.27 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 / \text{mol}$ for karbondioksid, CO_2 . Vi ser at dersom $\frac{n}{V}$ er et lite tall (liten tetthet) kan vi neglisjere disse korreksjonene og bruke tilstandslikningen for en ideell gass.

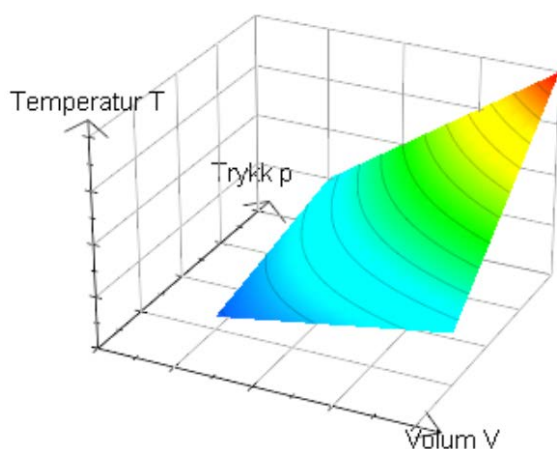
Disse korreksjonene kan forklares slik:

- Dersom ett mol av molekylene okkuperer volumet b , vil det totale volumet som molekylene kan bevege seg i være $(V - nb)$. Vi bør derfor erstatte V med $(V - nb)$ i tilstandslikningen.
- I en reell gass er det tiltrekkende krefter mellom molekylene. Men et molekyl ved kanten av beholderen (eller ved trykkmåleren) vil kun merke krefter som trekker bort fra veggen (eller fra trykkmåleren). Det trykket vi måler vil derfor være litt for lavt. Antall vekselvirkninger mellom molekylene vil være proporsjonalt med kvadratet av antall molekyler pr volumenhet. Dersom trykket ved veggen (eller ved trykkmåleren) er p , vil trykket inne i gassen være av formen

$$\left(p + a \cdot \left(\frac{n}{V} \right)^2 \right) .$$

Når vi gjør disse korreksjonene, får vi Van der Waals likning.

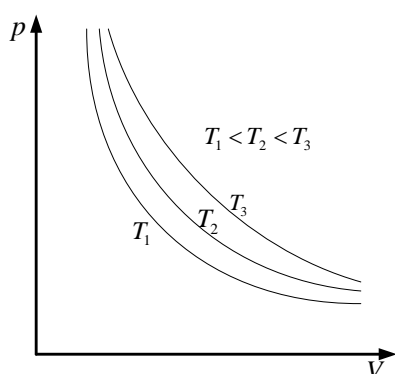
10.2.4. Grafisk framstilling av tilstandslikningen.



Dersom vi har en avstengt gass, gir tilstandslikningen en sammenheng mellom trykket p , volumet V og temperaturen T . Vi kan for eksempel oppfatte T som funksjon av p og V . Grafen til en slik funksjon blir en flate i et tredimensjonalt koordinatsystem, slik som du ser på figuren til venstre.

Slike tredimensjonale grafer er lite egnet til framstilling på et papirplan. Vi holder heller en av de variable størrelsene konstant mens de andre to varierer. Da får vi en vanlig todimensjonal graf.

På den tredimensjonale figuren ovenfor er det tegnet inn linjer for konstant temperatur. Disse linjene kan vi projisere ned i p - V -planet. De grafene vi da får, kaller vi *isotemer*.



Til venstre ser du et pV -diagram for en ideell gass. På diagrammet er det tegnet inn tre isotermer for tre temperaturer T_1 , T_2 og T_3 . Vi ser av likningen

$$p = \frac{nRT}{V}$$

at jo høyere temperaturen er mens volumet V holdes konstant, jo større blir p . Dette fører til at når T øker, vil isotermeren forskyves oppover i koordinatsystemet. Dette framgår også av den tredimensjonale figuren ovenfor.

10.3. Termisk utvidelse.

Vi konstruerte vår første temperaturskala ved å bruke at volumet til legemer endrer seg med temperaturen. Nå har vi definert en bedre temperaturskala, og kan gå den motsatte veien: Vi skal undersøke slik **termisk utvidelse** av væsker og faste stoffer ved hjelp av denne temperaturskalaen.

De aller fleste stoffene utvider seg når temperaturen øker (vann mellom 0°C og 4°C er et viktig unntak). Slik termisk utvidelse kan vi forklare ved at når temperaturen øker i et legeme, så øker den gjennomsnittlige energien til molekylene i legemet. Dermed øker den midlere avstanden mellom molekylene. Dette ser vi som en utvidelse av legemet.

10.3.1. Lineær utvidelse.



Anta at vi har en stang som har lengden L_0 ved temperaturen T_0 .

Ved temperaturendringen ΔT endrer lengden seg med ΔL .

Forsøk har vist at når ΔT ikke er for stor (mindre enn ca. 100°C), er ΔL tilnærmet proporsjonal med ΔT og med L_0 slik at:

$$\Delta L \approx \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T .$$

Proporsjonalitetskonstanten α kalles **den termiske lengdeutvidelseskoeffisienten**, og er forskjellig fra stoff til stoff. Når ΔT måles i K, vil α måles i K^{-1} .

Hvis ei stang har lengde L_0 ved temperaturen T_0 , så er lengden L som stanga har ved temperaturen $T = T_0 + \Delta T$ gitt ved

$$L = L_0 + \Delta L \approx L_0 + \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T = L_0(1 + \alpha \cdot \Delta T) .$$

Likningen over sier at det er en lineær sammenheng mellom lengdeforandring og temperaturforandring. Dette stemmer ikke helt eksakt når temperaturforandringen blir stor. Da er det bedre å bruke mer kompliserte sammenhenger, for eksempel

$$L \approx L_0 \left(1 + \alpha_1 \cdot \Delta T + \alpha_2 \cdot (\Delta T)^2 + \dots + \alpha_n \cdot (\Delta T)^n \right).$$

Også andre sammenhenger kan være aktuelle. Vi skal ikke ta opp slike problemstillinger i dette kurset.

Eksempel 10.3.1: Ei bru av stål er 200m lang ved temperaturen 20°C. Brua kan oppleve temperaturer mellom -30°C og 40°C. Hva er forskjellen i lengden til brua ved disse to temperaturene? Den termiske lengdeutvidelseskoeffisienten for stål er $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$.

Løsning: Når temperaturen endres fra 20°C til -30°C, har den endret seg med -50K. Ved -30°C har brua lengden

$$L_1 = L_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T) = 200 \text{m} (1 + 1.2 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1} \cdot (-50 \text{K})) = \underline{199.88 \text{m}}.$$

Når temperaturen endres fra 20°C til 40°C, har temperaturen økt med 20K. Ved 40°C har brua lengden

$$L_2 = L_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T) = 200 \text{m} (1 + 1.2 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1} \cdot 20 \text{K}) = \underline{200.05 \text{m}}.$$

Dermed vil lengden til brua variere med opptil

$$L_2 - L_1 = 200.05 \text{m} - 199.88 \text{m} = \underline{0.17 \text{m}}.$$

Dersom vi bare er interessert i den maksimale lengdeforandringen og ikke i minste og største verdi, kan vi benytte at maksimal temperaturforskjell er $40^\circ\text{C} - (-30^\circ\text{C}) = 70^\circ\text{C} = 70\text{K}$. Da blir

$$\Delta L \approx \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1} \cdot 200 \text{m} \cdot 70 \text{K} = \underline{0.17 \text{m}}.$$

Oppgave [10.3.1](#).

10.3.2. Volumutvidelse.

På samme måte som for lineær utvidelse, vil volumet V til et fast legeme eller et væskelegeme endres med en størrelse ΔV når temperaturen endres med ΔT . Eksperimenter viser at dersom temperaturendringene ikke er for store, er

$$\Delta V \approx \beta \cdot V_0 \cdot \Delta T$$

der β kalles den **termiske volumutvidelseskoeffisienten** mens V_0 er volumet før temperaturendringen. Når ΔT måles i K, har β enheten K^{-1} .

For faste stoffer er det en enkel sammenheng mellom lineær utvidelse og volumutvidelse. Anta at vi har en terning med sidekanter L og volum $V = L^3$. Startverdiene kaller vi L_0 og $V_0 = L_0^3$. Når temperaturen øker med ΔT , får vi ved hjelp av tilvekstformelen

$$\Delta V \approx \left. \frac{dV}{dL} \right|_{L=L_0} \cdot \Delta L = 3L_0^2 \cdot \Delta L = 3L_0^2 \cdot (\alpha L_0 \cdot \Delta T) = 3\alpha L_0^3 \cdot \Delta T = 3\alpha \cdot V_0 \cdot \Delta T.$$

Ved å sammenlikne dette uttrykket for ΔV med uttrykket

$$\Delta V \approx \beta \cdot V_0 \cdot \Delta T,$$

ser vi at

$$\beta \approx 3\alpha.$$

Her er noen verdier for α og β som gjelder omkring romtemperatur:

Stoff	α (K ⁻¹)	β (K ⁻¹)	Stoff	β (K ⁻¹)
Aluminium	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$7.2 \cdot 10^{-5}$	Etanol	$75 \cdot 10^{-5}$
Kopper	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$5.1 \cdot 10^{-5}$	Glyserin	$49 \cdot 10^{-5}$
Glass	$0.4 - 0.9 \cdot 10^{-5}$	$1.2 - 2.7 \cdot 10^{-5}$	Kvikksølv	$18 \cdot 10^{-5}$
Stål	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$3.6 \cdot 10^{-5}$		

Vann har en helt spesiell termisk utvidelse nær 4°C. Når temperaturen stiger fra 0°C til 4°C, avtar vannets volum. Når temperaturen kommer over 4°C, får imidlertid vannet en positiv termisk utvidelse. Dette har som konsekvens at vannet er tyngst ved 4°C. En annen viktig og spesiell egenskap er at vann i fast form (is) er lettere enn vann i flytende form.

Disse egenskapene er av fundamental betydning for livet på jorda. Når temperaturen i en dam avtar ned mot 0°C, vil vann ved 4°C være tyngst og vil synke mot bunnen. Islegging vil starte på vannets overflate, og isen vil ligge oppå det varmere (og tyngre) vannet. Dette forhindrer at dammen bunnfryser (i alle fall dersom dammen ikke er alt for grunn).

Oppgave [10.3.2](#).

***10.3.3. Termisk spenning.**

Hvis ei stang er festet slik at den ikke kan forlenges eller presses sammen når temperaturen endres, vil det oppstå trykk- eller strekkspenninger i stanga. Vi finner størrelsen av disse spenningene og de tilhørende kreftene ved å regne som om stanga først får utvide eller trekke seg sammen på grunn av temperaturendringene, og at vi deretter presser sammen eller strekker stanga til sin opprinnelige lengde.

Vi vet at dersom ei stang med lengde L_0 utsettes for en temperaturendring ΔT , blir lengdeendringen

$$\Delta L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T.$$

I kapitlet om elastisitet har vi vist at under sammenpressingen til opprinnelig lengde L_0 gjelder loven:

$$\frac{F_{\perp}}{A} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L_0} \Leftrightarrow \Delta L = \frac{1}{Y} \cdot \frac{F_{\perp}}{A} \cdot L_0$$

der A er tverrsnittsarealet, F_{\perp} er kraften vinkelrett på tverrsnittet, og Y er Youngs modul. Vi setter disse to uttrykkene for ΔL lik hverandre, og får

$$\alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T = \frac{1}{Y} \cdot \frac{F_{\perp}}{A} \cdot L_0 \Leftrightarrow \frac{F_{\perp}}{A} = Y \cdot \alpha \cdot \Delta T.$$

Eksempel 10.3.2: En aluminiumssylinder er 10cm lang og har tverrsnittsarealet 20cm^2 . Den skal brukes til å holde to stålvegger fra hverandre. Ved 12°C glir sylinderen så vidt inn mellom veggene. Anta at veggene ikke deformeres og at de er urørlige. Beregn kraften fra sylinderen på hver vegg når temperaturen er 28°C .
For aluminium er $Y = 7.0 \cdot 10^{10}\text{Pa}$ og $\alpha = 2.4 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1}$.

Løsning: Temperaturendringen er $\Delta T = 28^\circ\text{C} - 12^\circ\text{C} = 16\text{K}$.

Da er

$$\frac{F_{\perp}}{A} = Y \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$F_{\perp} = A \cdot Y \cdot \alpha \cdot \Delta T = 20 \cdot (10^{-2}\text{m})^2 \cdot 7.0 \cdot 10^{10}\text{Pa} \cdot 2.4 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1} \cdot 16\text{K} = \underline{\underline{53.8 \cdot 10^3\text{N}}}$$

Hvis det oppstår temperaturforskjeller i et legeme, vil ikke alle delene av legemet utvide seg likt. Da oppstår det spenninger i legemet, noe som kan få legemet til å sprekke. Dette fenomenet oppstår for eksempel når kalde isbiter legges i varmere vann.

10.4. Varmeoverføring.

10.4.1. Innledning.

Vi skal starte med å se nærmere på begrepene *temperatur* og *varme*. Vi har allerede antydnet at temperaturen er et mål for en *tilstand* i et legeme, knyttet til molekylenes bevegelse. Men hva er *varme*?

La oss gå rett på sak:

Varme er energi som overføres fra ett sted til et annet på grunn av temperaturforskjell.

Varme er altså en form for energi, og måles derfor i Joule (J).

Når vi nå skal se på varmeoverføring, trenger vi begrepene *varmestrøm* og *varmefluks*:

Når en energimengde ΔQ passerer et tverrsnitt i løpet av en tid Δt , er **varmestrømmen**

$$H = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}.$$

Varmefluksen Φ er varmestrøm pr flateenhet. Dersom varmen strømmer gjennom ei flate med tverrsnittsareal A vinkelrett på strømningsretningen, er

$$\Phi = \frac{H}{A}.$$

Varmestrømmen måles i Watt (W), mens varmefluks måles i W/m^2 .

Legg merke til at vi bruker t (liten bokstav) for *tid*, og T (stor bokstav) for *temperatur*.

Oppgave: [10.4.1.](#)

Vi skal nå se nærmere på *hvordan* varmen går fra et system til et annet, eller fra en del av et legeme til en annen del. Det finnes i hovedsak tre måter å overføre varme på:

- **Varmeledning:** Dette er den vanligste formen for varmeoverføring når varme spres fra en del av et fast legeme til en annen del, eller når varme overføres mellom faste legemer som er i kontakt med hverandre.
- **Konveksjon:** Dette er varmetransport i væsker og gasser som skyldes forflytning av masse.

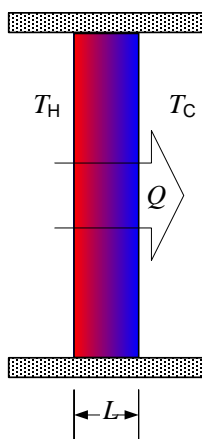
Både varmeledning og konveksjon forutsetter at det er molekyler til stede som kan transportere varmen. Men varme kan også transporteres gjennom vakuum:

- **Varmestråling:** Dette er varmeoverføring fra overflaten av legemer ved elektromagnetisk stråling. *Solskinn* er et velkjent eksempel.

Varmeledning og konveksjon forekommer gjerne samtidig. Hvis vi for eksempel skal studere varmetap gjennom et ett-lags vindu, har vi *varmeledning* gjennom vindusglasset og *konveksjon* på begge sider av glasset.

10.4.2. Varmeledning.

Figuren nedenfor til venstre viser ei plate med tverrsnittsareal A og tykkelse L . Vi antar at kantene oppe og nede er isolert slik at ingen varme utveksles med omgivelsene den veien. Den varme siden av plata har temperaturen T_H , mens den kalde siden av plata har temperaturen T_C . Forsøk har vist at:



Når varme overføres fra et sted med temperatur T_H til et sted med lavere temperatur T_C gjennom et homogent legeme med konstant tverrsnittsareal A og avstand L mellom de parallelle sideflatene, er **varmestrømmen**

$$H = \frac{dQ}{dt} = \lambda \cdot A \frac{T_H - T_C}{L}$$

og **varmefluksen**

$$\Phi = \frac{H}{A} = \frac{\lambda}{L} (T_H - T_C).$$

Konstanten λ kalles stoffets **varmekonduktivitet**, og oppgis i $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \frac{\text{K}}{\text{m}}) = \text{W}/(\text{K} \cdot \text{m})$.

Materialer med stor λ er gode varmeledere, mens de med liten λ er dårlige varmeledere (og gode isolatorer). Her er en liten oversikt:

Stoff	λ (W/(m·K))
Aluminium	205.0
Sølv	406.0
Stål	50.2
Glass	0.8
Tre	0.12-0.04
Luft	0.024
Hydrogen	0.14
Oksygen	0.023

Eksempel 10.4.1: Glass har varmekonduktiviteten $0.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. Et vindu er $60 \times 80 \text{ cm}$ stort og er laget av ei 2.5 mm tykk glassplate. Finn varmestrømmen gjennom dette vinduet når temperatur på glassets innside er 5 K høyere enn temperaturen på utsiden.

Løsning: Varmestrømmen blir

$$H = \lambda \cdot A \frac{T_H - T_C}{L} = 0.8 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m}) \cdot (0.60 \cdot 0.80) \text{ m}^2 \cdot \frac{5 \text{ K}}{0.0025 \text{ m}} = \underline{\underline{768 \text{ W}}}.$$

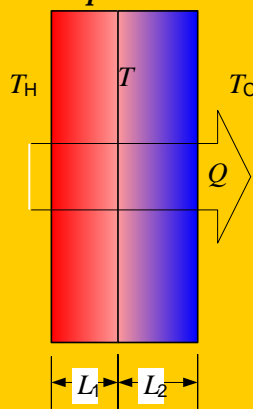
Oppgave: [10.4.2.](#)

Størrelsen $\frac{T_H - T_C}{L}$ angir temperaturendringen pr lengdeenhet, og kalles for *temperaturgradienten*. Det er ofte gunstig å erstatte lengden L med en kort strekning Δx . Da erstatter vi også $T_H - T_C$ med $-\Delta T$, der minustegnet skyldes at temperaturen *avtar* i den retningen som varmen strømmer. Så lar vi $\Delta x \rightarrow 0$, og vi får

$$H = \frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx}.$$

Hittil har vi holdt oss til varmestrøm gjennom *ei* plate. I praksis er det vanlig at slike plater er satt sammen av flere lag. Slike situasjoner skal vi behandle i neste punkt, men jeg kan ikke dy meg for å ta med et lite eksempel allerede nå som viser hvordan vi kan angripe slike problem.

Eksempel 10.4.2:



Figuren til venstre viser ei tolags plate. Det laget som står på den varme siden, har tykkelse $L_1 = 0.05 \text{ m}$ og varmekonduktivitet $\lambda_1 = 0.15 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, mens laget på den kalde siden har tykkelse $L_2 = 0.08 \text{ m}$ og varmekonduktivitet $\lambda_2 = 0.04 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. Hvor stor blir varmefluksen når temperaturen på den varme siden er $T_H = 15^\circ \text{C}$, mens temperaturen på den kalde siden er $T_C = -5^\circ \text{C}$?

Løsning: Nøkkelen til å løse problemet er at varmekraften må være like stor gjennom begge lagene. Vi kaller temperaturen på grensen mellom de to lagene for T , og får:

$$\Phi = \frac{\lambda_1}{L_1}(T_H - T) = \frac{\lambda_2}{L_2}(T - T_C).$$

Setter inn tallverdiene, og finner først T av den siste likheten:

$$\frac{0.15 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})}{0.05 \text{ m}}(15^\circ\text{C} - T) = \frac{0.04 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})}{0.08 \text{ m}}(T - (-5^\circ\text{C}))$$

$$3.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})(15^\circ\text{C} - T) = 0.5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})(T + 5^\circ\text{C})$$

$$45 \text{ W}/\text{m}^2 - 3.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \cdot T = 0.5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \cdot T + 2.5 \text{ W}/\text{m}^2$$

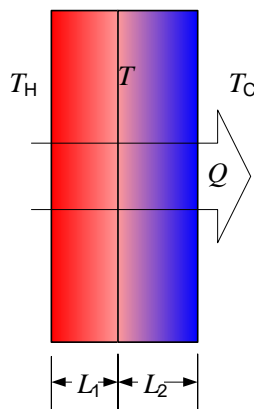
$$T = \frac{45 \text{ W}/\text{m}^2 - 2.5 \text{ W}/\text{m}^2}{3.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) + 0.5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})} = \underline{12.1^\circ\text{C}}$$

Nå finner vi varmekraften ved å sette inn i en av de to fluks-likningene, for eksempel

$$\Phi = \frac{\lambda_1}{L_1}(T_H - T) = \frac{0.15 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})}{0.05 \text{ m}}(15^\circ\text{C} - 12.1^\circ\text{C}) = \underline{\underline{8.7 \text{ W}/\text{m}^2}}.$$

I neste underkapittel kan du se hvordan slike problem kan systematiseres.

*10.4.3. Varmestrøm gjennom flerlags plater.



Nå skal se på varmekraft gjennom flater som er bygd opp av flere lag. Vi skal først se på varmekraften gjennom ei to-lags plate slik figuren til venstre viser. Varmekraften gjennom hver av de to platene blir

$$\Phi = \frac{\lambda_1}{L_1}(T_H - T) \Leftrightarrow T_H - T = \Phi \cdot \frac{L_1}{\lambda_1}$$

og

$$\Phi = \frac{\lambda_2}{L_2}(T - T_C) \Leftrightarrow T - T_C = \Phi \cdot \frac{L_2}{\lambda_2}.$$

Her merker vi oss at Φ er like stor i begge uttrykkene fordi all varmen som går gjennom den ene plata også må gå gjennom den andre. Ellers får vi lagret varme mellom platene, noe som er umulig.

Så legger vi sammen de to uttrykkene til høyre. Da faller T bort, og vi står igjen med

$$T_H - T_C = \Phi \cdot \frac{L_1}{\lambda_1} + \Phi \cdot \frac{L_2}{\lambda_2} = \Phi \left(\frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2} \right).$$

Vi innfører nå en *termisk resistans* R ved

$$R = \frac{L}{\lambda}.$$

Den termiske resistansen i vår to-lags-plate blir da summen av de termiske resistansene i hver plate:

$$R = \frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2}$$

slik at

$$T_H - T_C = \Phi \cdot R \Leftrightarrow \Phi = \frac{1}{R} \cdot (T_H - T_C).$$

Helt tilsvarende resultater får vi med plater som er satt sammen av flere lag:

Dersom en varmekraft Φ går gjennom flere plater som alle har samme areal A , og der plate nr. i har termisk konduktivitet λ_i og tykkelse L_i , er

$$T_H - T_C = R \cdot \Phi$$

der

$$R = \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{\lambda_i}$$

og T_H og T_C er temperatuene på henholdsvis den varme og den kalde siden av platene.

Vi kan finne temperaturforskjellen ΔT_i mellom de to sidene av ei av platene slik: Siden varmekraften Φ er like stor gjennom alle platene, har vi at

$$T_H - T_C = R \cdot \Phi$$

og

$$\Delta T_i = \frac{L_i}{\lambda_i} \cdot \Phi = R_i \cdot \Phi.$$

Vi deler disse to likningene på hverandre og forkorter bort Φ . Da får vi:

Temperaturforskjellen ΔT_i mellom de to sidene av plate nr. i er gitt ved

$$\frac{\Delta T_i}{T_H - T_C} = \frac{R_i}{R}.$$

Eksempel 10.4.3: En vegg består av to lag trepanel med isolasjonsmatte mellom. Hvert av panellagene er 3.0 cm tykke, mens isolasjonsmatta er 10 cm tykk. Treet har $\lambda_{\text{tre}} = 0.12 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, mens isolasjonsmatta har $\lambda_{\text{iso}} = 0.040 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. Anta at temperaturen på innervegg er 20°C , mens temperaturen på yttervegg er -10°C .

- Beregn den termiske resistansen i veggen.
- Hvor stor er varmekraften gjennom veggen?
- Hvor stor er temperaturforskjellen mellom de to sidene av isolasjonsmatta?
Hva er temperaturen på hver side av isolasjonsmatta?

Løsning:

- a) Den termiske resistansen i hvert av trelagene er

$$R_{\text{tre}} = \frac{L_{\text{tre}}}{\lambda_{\text{tre}}} = \frac{0.03 \text{ m}}{0.12 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = \underline{0.25 (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}}.$$

Den termiske resistansen i isolasjonsmatta er

$$R_{\text{iso}} = \frac{L_{\text{iso}}}{\lambda_{\text{iso}}} = \frac{0.10 \text{ m}}{0.040 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = \underline{2.50 (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}}.$$

Den samlede termiske resistansen i veggen blir

$$R = 2 \cdot R_{\text{tre}} + R_{\text{iso}} = 2 \cdot 0.25 (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W} + 2.50 (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W} = \underline{\underline{3.00 (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}}}.$$

- b) Når temperaturen på innervegg er 20°C mens temperaturen på yttervegg er -10°C , blir varmefluksen Φ gjennom veggen gitt ved

$$\Phi = \frac{T_H - T_C}{R} = \frac{20^\circ\text{C} - (-10^\circ\text{C})}{3.00 (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}} = \underline{\underline{10.0 \text{ W/m}^2}}.$$

(I praksis må vi ta hensyn til at isolasjonen er brutt av bjelkelag og lignende, slik at den effektive varmefluksen blir større enn disse beregningene viser).

- c) Temperaturforskjellen ΔT mellom de to sidene av isolasjonsmatta er gitt ved

$$\frac{\Delta T}{T_H - T_C} = \frac{R_{\text{iso}}}{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta T = (T_H - T_C) \cdot \frac{R_{\text{iso}}}{R} = (20^\circ\text{C} - (-10^\circ\text{C})) \cdot \frac{2.50 (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}}{3.00 (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}} = \underline{\underline{25.0 \text{ K}}}$$

For hvert av trelagene er det en temperaturforskjell på

$$\frac{1}{2}(30 \text{ K} - 25.0 \text{ K}) = 2.5 \text{ K}.$$

Temperaturen på den varme siden av isolasjonen er derfor

$$20^\circ\text{C} - 2.5^\circ\text{C} = \underline{\underline{17.5^\circ\text{C}}},$$

mens temperaturen på den kalde siden av isolasjonen er

$$-10^\circ\text{C} + 2.5^\circ\text{C} = \underline{\underline{-7.5^\circ\text{C}}}.$$

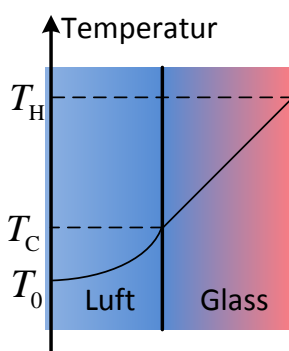
Oppgave [10.4.3.](#)

Innenfor byggteknikk benyttes *u-verdien* (også kalt *k-verdien*) for å angi isolasjonsevne. Denne verdien er rett og slett gitt ved

$$u = \frac{1}{R},$$

og måles i $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$.

10.4.4. Konveksjon.



Luft har svært lav varmekonduktivitet, d.v.s. at luft er en god isolator. Dersom lufta hadde holdt seg i ro inntil et vindu eller en veggflate, ville luftsjiktet bidratt med en god ekstra isolasjon. Men lufta er ikke i ro. Selv om det tilsynelatende er helt stille luft, vil luft som varmes opp stige, og luft som kjøles ned vil synke. Dersom et vindu skiller mellom varm inneluft og kald uteluft, vil det danne seg *grensesjikt* på begge sider av vinduet der temperaturen gradvis endres. Figuren til venstre viser hvordan temperaturen kan endres på utsiden av et vindu, og gjennom vinduet.

Den varmeoverføringen som skyldes at lufta stiger eller synker nær vinduet, er et eksempel på *konveksjon*. Generelt kan vi si at konveksjon er varmeoverføring i gass eller væske som skyldes forflytning av partikler fra et område i gassen/væska til et annet ("omrøring"). Hvis forflytningen skjer naturlig fordi tettheten varierer med temperaturen, kaller vi det *naturlig konveksjon*. Når varm luft stiger opp og kaldere luft synker ned har vi et eksempel på slik naturlig konveksjon. Hvis forflytningen skyldes vind eller strøm, eller ei pumpe eller et ventilasjonssystem eller liknende framtvinger forflytningen, kaller vi det *tvungen konveksjon*.

Konveksjon er temmelig komplisert, og vi skal begrense oss til ett spesialtilfelle: På den ene siden av ei plate (for eksempel et vindu) er det kald luft, mens det er varm luft på den andre siden. Da får vi den situasjonen som er vist på figuren ovenfor, der ei glassplate står med sin ene flate mot kald uteluft. Temperaturen T_C i grenseflata mellom glass og kald luft er da høyere enn temperaturen T_0 i lufta ellers. Det danner seg et *grensesjikt* der temperaturen gradvis går fra T_0 til T_C . Tykkelsen av dette grensesjiktet, og temperaturforskjellen $\Delta T = T_C - T_0$ avhenger av en rekke faktorer. Men eksperimenter viser at:

Ved naturlig konveksjon er varmestrømmen gjennom et grensesjikt grovt sett gitt ved

$$H = \frac{dQ}{dt} = \alpha \cdot A \cdot (T_C - T_0) = \alpha \cdot A \cdot \Delta T \quad \Leftrightarrow \quad \Phi = \frac{H}{A} = \alpha \cdot \Delta T.$$

der A er arealet av grenseflata.

Størrelsen α kalles *varmeovergangskoeffisienten*, og måles i $W/(m^2 \cdot K)$.

Nærmere undersøkelser viser at α avhenger av ΔT . Det er vanlig å anta at for naturlig konveksjon er $\alpha \approx h \cdot (\Delta T)^{\frac{1}{4}}$ der h er omtrent lik 2. Men denne verdien av h varierer mye, og avhenger bl.a. av om plata står vertikalt eller ligger horisontalt. Dersom plata ligger, er h større på oversiden enn på undersiden av plata. Bytter vi ut lufta med en annen gass eller med en væske, vil også h endres mye. Ved *tvungen* konveksjon (for eksempel på grunn av vind) blir h naturlig nok mye større enn ved naturlig konveksjon. Derfor er det ikke vanlig å benytte tabellverdier for α eller h i praktiske beregninger. Dette kan rettferdiggjøres ved å vise til at $(\Delta T)^{\frac{1}{4}}$ ikke vil variere veldig mye med ΔT . For eksempel er $5^{\frac{1}{4}} \approx 1.5$, mens $20^{\frac{1}{4}} \approx 2.1$.

Dessuten vil α avhenge av "vær og vind", og er under alle omstendigheter svært usikker. Norsk standard ved beregning av varmetap gjennom en vegg eller et vindu er at $\alpha = 8 W/(m^2 \cdot K)$ på innsiden, og $\alpha = 25 W/(m^2 \cdot K)$ på utsiden.

Eksempel 10.4.4: Beregn varmestrømmen på grunn av naturlig konveksjon fra vinduet i eksempel 4.2.1, når vi antar at $\Delta T = 5 K$ og $\alpha = 30 W/(m^2 \cdot K)$.

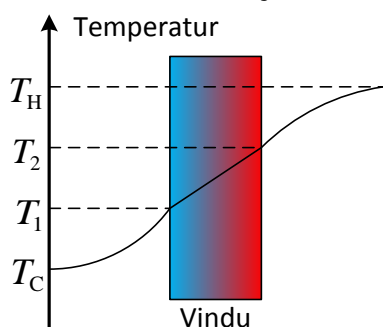
Løsning: Varmestrømmen blir

$$H = \alpha \cdot A \cdot \Delta T_0 = (30 W/(m^2 \cdot K)) \cdot (0.80 \cdot 0.60 m^2) \cdot (5.0 K) = \underline{\underline{72 W}}.$$

Ved å sammenlikne dette svaret med svaret fra Eksempel 10.4.1, vil du se noe interessant. Den beregnede varmestrømmen gjennom vindusglasset er jo mye større enn varmestrømmen som skyldes konveksjon! Men det er jo ikke mulig. Varmestrømmen må være like stor gjennom glasset som i grensesjiktene mot glasset. Dette skal vi undersøke nærmere nedenfor.

Oppgave: [10.4.4.](#)

*10.4.5. Kombinasjon av varmeledning og konveksjon.



Vi skal nå kombinere varmeledning med konveksjon på de to sidene av ei plate, for eksempel et vindu som på figuren til venstre. Der er ute-temperaturen T_C mens temperaturen inne er T_H . Temperaturen på vindusflatene er T_1 og T_2 på henholdsvis utsiden og innsiden.

Vi innfører nå en *termisk resistans ved konveksjon*

$$R_k = \frac{1}{\alpha}$$

Da kan vi skrive varmefluksen ved konveksjon slik:

$$\Phi = \frac{H}{A} = \alpha \cdot \Delta T = \frac{1}{R_k} \cdot \Delta T \Leftrightarrow \Delta T = \Phi \cdot R_k$$

Siden varmefluksen Φ er den samme på begge sider av vinduet og gjennom vinduet, har vi:

Konveksjon på utsiden: $T_1 - T_C = \Phi \cdot R_{k,ute}$ der $R_{k,ute} = \frac{1}{\alpha_{ute}}$,

Gjennom glasset: $T_2 - T_1 = \Phi \cdot R_{glass}$ der $R_{glass} = \frac{L}{\lambda_{glass}}$,

Konveksjon på innsiden: $T_H - T_2 = \Phi \cdot R_{k,inne}$ der $R_{k,inne} = \frac{1}{\alpha_{inne}}$.

Som før legger vi sammen disse likningene, og får

$$T_H - T_C = \Phi (R_{k,ute} + R_{glass} + R_{k,inne}) \Leftrightarrow \Phi = \frac{T_H - T_C}{R_{k,ute} + R_{glass} + R_{k,inne}}$$

Den samlede termiske resistansen er derfor

$$R = R_{k,ute} + R_{glass} + R_{k,inne}$$

Eksempel 10.4.5: Vi skal vende tilbake til vårt 60×80 cm store vindu, som var laget av 2.5 mm tykt glass med varmekonduktivitet $0.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. Vi antar at varmeovergangskoeffisienten ved konveksjon er $\alpha_0 = 25 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ på utsiden, og $\alpha_1 = 8 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ på innsiden. Innetemperatur er $22 \text{ }^\circ\text{C}$ og utetemperaturen er $0 \text{ }^\circ\text{C}$.

- Finn termisk resistans for dette vinduet.
- Finn varmestrømmen gjennom vinduet.
- Finn temperaturforskjellen mellom innsiden og utsiden av glasset.

Løsning:

a) Starter med å finne de termiske resistansene:

$$\text{Utvendig konveksjon: } R_0 = \frac{1}{\alpha_{k, \text{ute}}} = \frac{1}{25 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})} = 0.040 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}}.$$

$$\text{Innvendig konveksjon: } R_I = \frac{1}{\alpha_{k, \text{inne}}} = \frac{1}{8.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})} = 0.125 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}}.$$

$$\text{Vindusglasset: } R_{\text{glass}} = \frac{L}{\lambda_{\text{glass}}} = \frac{0.0025 \text{ m}}{0.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 0.003 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}}.$$

Samlet termisk resistans blir

$$R = R_0 + R_I + R_{\text{glass}} = (0.040 + 0.125 + 0.003) \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}} = \underline{\underline{0.168 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}}}}.$$

b) Varmefluksen er

$$\Phi = \frac{T_H - T_C}{R} = \frac{(22 - 0) \text{ K}}{0.168 (\text{m}^2 \cdot \text{K}) / \text{W}} = \underline{131 \text{ W/m}^2}.$$

Arealet av vinduet er $A = (0.60 \text{ m}) \cdot (0.80 \text{ m}) = 0.48 \text{ m}^2$, slik at varmestrømmen gjennom vinduet blir

$$H = A \cdot \Phi = 0.48 \text{ m}^2 \cdot 131 \text{ W/m}^2 = \underline{\underline{63 \text{ W}}}.$$

c) Temperaturforskjellen mellom innsiden og utsiden av glasset finner vi av

$$\frac{R_{\text{glass}}}{R} = \frac{\Delta T_{\text{glass}}}{T_H - T_C} \Leftrightarrow \Delta T_{\text{glass}} = \frac{R_{\text{glass}}}{R} (T_H - T_C) = \frac{0.003 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}}}{0.168 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}}} \cdot 22 \text{ K} = \underline{0.4 \text{ K}}.$$

Vi ser at selv om temperaturforskjellen mellom inne- og ute-temperatur er 22 K, er temperaturforskjellen over vindusglasset bare 0.4 K. Det aller meste av isolasjonen ligger faktisk i luftsjiktet nær vindusglasset, og aller mest på innsiden.

Oppgave: [10.4.5.](#)

10.4.6. Varmestråling.

Varmestråling er energioverføring ved elektromagnetiske bølger som f.eks. synlig lys, infrarødt eller ultrafiolett lys.

Alle legemer sender ut energi i form av elektromagnetisk stråling. Slik stråling har vært studert både eksperimentelt og teoretisk siden midt på 1800-tallet. En av de viktigste lovene for slik stråling er *Stefan-Boltzmanns lov*:

Varmestrømmen som skyldes stråling fra et svart legeme med overflateareal A og overflatetemperatur T (målt i Kelvin) er:

$$H = \frac{dQ}{dt} = A\sigma T^4.$$

Her er $\sigma = 5.670400 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ som kallers *Stefan-Boltzmanns konstant*.

Et svart legeme er et legeme som ikke reflekterer noe stråling. All stråling som kommer fra legemet er dannet av legemet selv. Pussig nok er sola et av de beste eksempler på et svart legeme. For andre legemer må vi multiplisere med en konstant ε som kalles **emisjonskoeffisienten**, og som er et tall mellom 0 og 1. For et svart legeme er $\varepsilon = 1$, mens $\varepsilon \approx 0$ for et perfekt speilende legeme.

Eksempel 10.4.6: Utenfor jordas atmosfære er varmestrålingen fra sola målt til 1366 W/m^2 på ei flate vinkelrett på solstrålene. For at jorda skal holde konstant temperatur, må den stråle ut like mye energi som den mottar fra sola. Finn temperaturen på jorda når vi antar at jorda absorberer all solenergien, og at den energien som mottas fordeles jevnt over hele jordkloden (vi finner en "global gjennomsnittstemperatur"). Sett emisjonskoeffisienten $e = 1.0$.

Løsning: Etter forutsetningene vil jorda motta en varmestrøm

$$H_{\text{inn}} = 1366 \text{ W/m}^2 \cdot \pi R^2$$

der R er jordas radius. Arealet av jordas overflate er

$$A = 4\pi R^2,$$

slik at når gjennomsnittstemperaturen på jorda er T , er varmestrømmen ut fra jordas overflate gitt ved

$$H_{\text{ut}} = Ae\sigma T^4 = 4\pi R^2 \cdot 1.0 \cdot \sigma \cdot T^4.$$

Vi har termisk likevekt når

$$H_{\text{inn}} = H_{\text{ut}} \Leftrightarrow 1366 \text{ W/m}^2 \cdot \pi R^2 = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

$$\Leftrightarrow T^4 = \frac{1366 \text{ W/m}^2}{4e\sigma} = \frac{1366 \text{ W/m}^2}{4 \cdot 1.0 \cdot 5.670400 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

$$\Leftrightarrow T = 278.58 \text{ K} = \underline{\underline{5.4^\circ \text{C}}}$$

Eksemplet ovenfor ser bort fra mange faktorer. De viktigste er:

- Noe av strålingen fra sola reflekteres fra snødekte flater, skyer og lignende, og inngår ikke i regnskapet. Man anslår at ca. 30 – 35 % av strålingen reflekteres.
- Drivhuseffekten fører til at temperaturen på bakken blir høyere enn den temperaturen som vi finner med slike beregninger som i eksemplet.

Oppgave: [10.4.6.](#)

Strålingen fra et legeme med overflatetemperatur T vil ligge innenfor et bølgelengdeområde som avhenger av T . Sammenhengen mellom T og den bølgelengden der strålingen er mest intens, er gitt ved **Wiens forskyvningslov**, som litt upresist kan formuleres slik:

Stålingen fra et legeme med overflatetemperatur T er mest intens ved en bølgelengde λ_{max} der

$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}.$$

Eksempel 4.4.2: Solstrålingen er mest intens ved bølgelengder nær $500 \cdot 10^{-9} \text{ m}$. Bruk dette til å beregne overflatetemperaturen på sola.

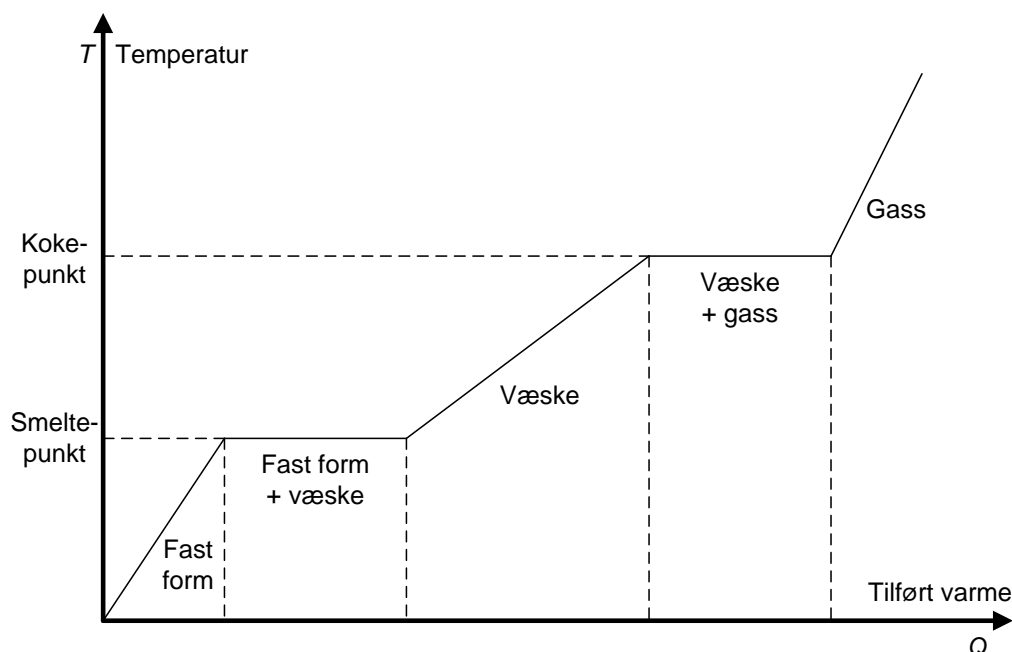
Løsning: Ved å bruke Wiens forskyvningslov får vi

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx \underline{\underline{5800 \text{ K}}}.$$

10.5. Varmekapasiteter, overgangsvarme og kalorimetri.

10.5.1. Innledning.

Vi skal nå se på sammenhengen mellom den varmen som tilføres til et legeme, og temperaturøkningen i legemet. For ordens skyld vil jeg minne om at *varme* er energi som overføres som følge av temperaturforskjell.



La oss ta utgangspunkt i et legeme som består av et fast stoff, for eksempel is (som er H_2O i fast form). Vi starter med en temperatur som er godt under smeltepunktet, og varmer opp så langsomt at temperaturen er lik i hele legemet. Etter hvert som vi tilfører varme, vil temperaturen i legemet stige inntil vi når en temperatur der legemet begynner å smelte. Denne temperaturen kaller vi *smeltepunktet* for stoffet.

Dersom vi fortsetter å tilføre varme langsomt slik at det er termisk likevekt mellom stoffet i fast form (is) og stoffet i væskeform (vann), vil temperaturen i blandingen holde seg konstant på smeltepunktet inntil alt fast stoff er smeltet. Deretter vil temperaturen i væsken fortsette å stige når vi tilfører mer varme, inntil vi når en temperatur der væsken begynner å gå over i gassform (den *fordamper*). Denne temperaturen kaller vi *kokepunktet* for stoffet.

Vi fortsetter å tilføre varme langsomt slik at det er termisk likevekt mellom stoffet i væskeform (vann) og stoffet i gassform (damp). Da vil temperaturen i blandingen holde seg

konstant inntil all væsken er fordampet. Deretter vil temperaturen i dampen fortsette å stige når vi tilfører mer varme.

Denne utviklingen er illustrert i grafen ovenfor.

Vi skal nå se nærmere på sammenhengen mellom tilført varme og temperatur. Først skal vi se hva som skjer mens stoffet er i samme *aggregattilstand* (fast form, væske eller gass). Deretter skal vi se hva som skjer under en *faseovergang*. Til slutt skal vi sette opp et energiregnskap når det utveksles varme (energi).

10.5.2. Varmekapasiteter.

Et legeme mottar en varmemengde ΔQ uten at det inntreffer noen faseforandring. Da stiger temperaturen i legemet med ΔT . Eksperimenter viser at for ett bestemt legeme er temperaturøkningen proporsjonal med den tilførte varmen:

$$\Delta Q = C \cdot \Delta T \Leftrightarrow C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Størrelsen C kalles *legemets varmekapasitet*, og oppgis i J/K. Varmekapasiteten angir altså hvor mange Joule som må tilføres legemet for at temperaturen skal stige med 1 Kelvin.

Dersom legemet består av kun *ett* stoff, er det ofte nyttig å vite hvor mye varme som må tilføres for å øke temperaturen i 1 kg av dette stoffet med 1 K. Eksperimenter viser nemlig at den tilførte energien er svært nær proporsjonal med både massen av legemet og temperaturøkningen. Vi definerer derfor en *spesifikk varmekapasitet* for hvert stoff slik:

Når en varmemengde ΔQ tilføres til en masse m av et stoff uten at det oppstår faseovergang, er temperaturøkningen ΔT gitt ved

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T \Leftrightarrow c = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T}.$$

Størrelsen c kalles *stoffets spesifikke varmekapasitet*, og oppgis i J/(kg · K).

Den spesifikke varmekapasiteten c til et stoff angir altså hvor mye energi som må tilføres 1 kg av stoffet for at temperaturen skal stige med 1 Kelvin. Dersom vi skal være helt nøyaktig, avhenger c litt av temperaturen. Vi skal se bort fra denne avhengigheten.

Noen ganger er det nyttigere å vite hvor mye energi som må tilføres *1 mol* av et stoff for å øke temperaturen med 1 Kelvin. Da snakker vi om *stoffets molare varmekapasitet*, som vi også betegner med c . Vi har altså at

$$\Delta Q = c \cdot n \cdot \Delta T$$

der n er antall mol som legemet består av.

Eksempel 10.5.1: En komponent i en elektrisk krets er lagd av 7.4 mg silisium. Den elektriske strømmen gjennom komponenten har effekten $P = 0.62 \text{ mW}$. Hvor raskt øker temperaturen i komponenten hvis den ikke avgir varme?
Silisium har den spesifikke varmekapasiteten $705 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Løsning: I løpet av et tidsintervall Δt tilføres energien $\Delta Q = P \cdot \Delta t$ (Husk at effekt $P = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$).

Dette fører til at temperaturen til komponenten øker med ΔT :

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T \Leftrightarrow \Delta T = \frac{\Delta Q}{c \cdot m} = \frac{P \cdot \Delta t}{c \cdot m}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{P}{c \cdot m} = \frac{0.62 \cdot 10^{-3} \text{ J/s}}{705 \text{ J/(kg K)} \cdot 7.4 \cdot 10^{-6} \text{ kg}} = \underline{\underline{0.12 \text{ K/s}}}$$

Tabellen nedenfor viser spesifikke varmekapasiteter for noen utvalgte stoffer.

Stoff	Spesifikk varmekapasitet (J/(kg · K))
Aluminium	910
Kopper	390
Is (nær 0°C)	2100
Vann	4190
Bly	130

Den spesifikke (eller molare) varmekapasiteten for gasser avhenger av hvordan oppvarmingen foregår. Vi skal komme tilbake til dette senere.

Oppgave: [10.5.1.](#)

10.5.3. Spesifikk overgangsvarme.

Vi skal nå se på hva som skjer under en faseovergang. Vi starter med et fast stoff på smeltepunktet. Etter å ha tilført en varmemengde ΔQ er en masse m av stoffet gått over til væske uten at temperaturen har endret seg. Eksperimenter viser at ΔQ er proporsjonal med massen m . Vi har altså at:

Når en masse m av et fast stoff som befinner seg på smeltepunktet går over til væske ved samme temperatur når det tilføres en varmemengde ΔQ , er

$$\Delta Q = L_s \cdot m \Leftrightarrow L_s = \frac{\Delta Q}{m}$$

Størrelsen L_s måles i J/kg, og kalles stoffets *spesifikke smeltevarme*.

Ved den motsatte prosessen, der en masse m går over fra væske til fast stoff uten temperaturendring, avgis en varmemengde ΔQ som er nøyaktig like stor som den varmemengden som ble tilført ved smeltingen.

Vi får helt tilsvarende forhold ved fordamping:

Når en masse m av et væske som befinner seg på kokepunktet går over til damp ved samme temperatur når det tilføres en varmemengde ΔQ , er

$$\Delta Q = L_f \cdot m \Leftrightarrow L_f = \frac{\Delta Q}{m}.$$

Størrelsen L_f måles i J/kg, og kalles stoffets *spesifikke fordampingsvarme*.

Nøyaktig like stor varmemengde avgis ved kondensasjon.

Spesifikk smeltevarme og spesifikk fordampingsvarme kalles med en fellesbetegnelse for *spesifikk overgangsvarme*.

Tabellen nedenfor viser spesifikke smelte- og fordampingsvarme (målt i J/kg) sammen med smeltepunkt og kokepunkt (målt i °C) for noen utvalgte stoffer. Merk at både smeltepunkt og kokepunkt avhenger av trykket, og at dataene i tabellen gjelder ved vanlig atmosfæretrykk.

Stoff	Spesifikk smeltevarme	Smeltepunkt	Spesifikk fordampingsvarme	Kokepunkt
Vann	$334 \cdot 10^3$	0.0	$2256 \cdot 10^3$	100.0
Etanol	$104.2 \cdot 10^3$	-114	$854 \cdot 10^3$	78
Bly	$24.5 \cdot 10^3$	327.3	$871 \cdot 10^3$	1750
Sølv	$88.3 \cdot 10^3$	960.8	$2336 \cdot 10^3$	2193
Kopper	$134 \cdot 10^3$	1083	$5069 \cdot 10^3$	1187

Noen stoffer kan gå direkte fra fast stoff til gass uten å smelte først. Denne faseovergangen kalles *sublimasjon*, og den tilhørende spesifikke overgangsvarmen kalles *spesifikk sublimasjonsvarme* L_s .

Oppgave: [10.5.2.](#)

10.5.4. Kalorimetri.

Vi skal nå se hvordan vi kan sette opp energiregnskap når systemer mottar eller avgir varme. Vi benytter da at:

- Den varmemengden ΔQ som *tilføres* et system, har positivt fortegn. Dersom systemet *avgir* en varmemengde ΔQ , blir fortegnet negativt.
- Ved oppvarming eller avkjøling uten faseovergang, vil ΔQ få samme fortegn som ΔT .
- Når et legeme smelter eller fordampes, må det *tilføres* en positiv varmemengde ΔQ . Når et legeme *størkner* eller *kondenserer* må det *avgis* en negativ varmemengde ΔQ .

Eksemplene nedenfor viser hvordan disse prinsippene anvendes.

Eksempel 10.5.2: En aluminiumsbeholder har massen $m_{\text{Al}} = 0.120\text{kg}$ og temperaturen $T_{\text{Al}} = 20.0^\circ\text{C}$. Vi heller $m_{\text{vann}} = 300\text{g}$ vann med temperaturen $T_{\text{vann}} = 70.0^\circ\text{C}$ i beholderen. Hva er temperaturen til vannet og beholderen når de er i termisk likevekt? Se bort fra varmeutveksling med omgivelsene. De spesifikke varmekapasitetene er:

$$c_{\text{vann}} = 4190\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K}), \quad c_{\text{Al}} = 910\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K}).$$

Løsning: Det varme vannet vil varme opp aluminiumsbeholderen. Vi kaller fellestemperaturen når likevekt er inntruffet for T . Energien i vannet endrer seg med:

$$\Delta Q_{\text{vann}} = c_{\text{vann}} m_{\text{vann}} \Delta T_{\text{vann}} = c_{\text{vann}} m_{\text{vann}} (T - T_{\text{vann}}).$$

Energien i aluminiumet endrer seg med:

$$\Delta Q_{\text{Al}} = c_{\text{Al}} m_{\text{Al}} \Delta T_{\text{Al}} = c_{\text{Al}} m_{\text{Al}} (T - T_{\text{Al}}).$$

Siden det ikke utveksles energi med omgivelsene i denne prosessen, er systemets totale energi bevart. Da er

$$\begin{aligned} \Delta Q_{\text{vann}} + \Delta Q_{\text{Al}} &= 0 \\ c_{\text{vann}} m_{\text{vann}} (T - T_{\text{vann}}) + c_{\text{Al}} m_{\text{Al}} (T - T_{\text{Al}}) &= 0 \\ (c_{\text{vann}} m_{\text{vann}} + c_{\text{Al}} m_{\text{Al}}) T &= c_{\text{vann}} m_{\text{vann}} T_{\text{vann}} + c_{\text{Al}} m_{\text{Al}} T_{\text{Al}} \\ T &= \frac{c_{\text{vann}} m_{\text{vann}} T_{\text{vann}} + c_{\text{Al}} m_{\text{Al}} T_{\text{Al}}}{c_{\text{vann}} m_{\text{vann}} + c_{\text{Al}} m_{\text{Al}}} \\ &= \frac{4190 \cdot 0.300 \cdot 70 + 910 \cdot 0.120 \cdot 20}{4190 \cdot 0.300 + 910 \cdot 0.120} ^\circ\text{C} = \underline{\underline{66^\circ\text{C}}} \end{aligned}$$

Legg merke til at vi kan jobbe med alle temperaturene i grader Celsius selv om de spesifikke varmekapasitetene har enheten $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$. Dette skyldes at en temperaturforskjell på 1°C svarer til en temperaturforskjell på 1K . Derfor kan vi erstatte $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ med $\text{J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ i beregningene. Dermed blir enhetene riktige.

Eksempel 10.5.3: Vi vil avkjøle $m_{\text{brus}} = 0.25\text{kg}$ brus fra $T_{\text{brus}} = 25^\circ\text{C}$ til $T = 5^\circ\text{C}$. Dette skal gjøres ved å tilføre is med temperaturen $T_{\text{is}} = -20^\circ\text{C}$. Hvor mye is må vi tilføre for at sluttemperaturen skal bli $T = 5^\circ\text{C}$ når all isen er smeltet? Anta at brusen har samme spesifikke varmekapasitet som vann, og se bort fra varmetap til omgivelsene.

Det oppgis at:

$$\text{Spesifikk varmekapasitet for vann er } c_{\text{vann}} = 4190\text{J}/(\text{kgK}).$$

$$\text{Spesifikk varmekapasitet for is er } c_{\text{is}} = 2100\text{J}/(\text{kgK}).$$

$$\text{Spesifikk smeltevarme for is er } L_{s,\text{is}} = 3.34 \cdot 10^5\text{J}/\text{kg}.$$

Løsning: Brusene mottar en varmemengde

$$\Delta Q_{\text{brus}} = c_{\text{vann}} m_{\text{brus}} \Delta T_{\text{brus}} = 4190\text{J}/(\text{kgK}) \cdot 0.25\text{kg} \cdot (5^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}) = \underline{\underline{-2.095 \cdot 10^4\text{J}}}.$$

Det negative fortegnet skyldes at brusen avgir varme (den avkjøles).

Den tilførte isen vil først varmes opp til smeltepunktet og deretter gjennomgå en faseovergang til vann. Til slutt skal smeltevannet varmes opp til 5 °C . Vi får da at

$$\begin{aligned}\Delta Q_{\text{is}} &= c_{\text{is}} m_{\text{is}} \Delta T_{\text{is}} + \underbrace{m_{\text{is}} \cdot L_{s,\text{is}}}_{\substack{\text{Isen blir} \\ \text{tilført} \\ \text{energi}}} + c_{\text{vann}} m_{\text{is}} \Delta T_{\text{vann}} \\ &= m_{\text{is}} \left(2100 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \cdot (0 - (-20)) \text{ K} + 3.34 \cdot 10^5 \text{ J/kg} + 4190 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \cdot (5 - 0) \text{ K} \right) \\ &= \underline{m_{\text{is}} \cdot 3.97 \cdot 10^5 \text{ J/kg}}\end{aligned}$$

Siden det ikke utveksles varme med omgivelsene må den totale energiendringen være null slik at

$$\begin{aligned}\Delta Q_{\text{brus}} + \Delta Q_{\text{is}} &= 0 \\ -2.095 \cdot 10^4 \text{ J} + m_{\text{is}} \cdot 3.97 \cdot 10^5 \text{ J/kg} &= 0 \Leftrightarrow m_{\text{is}} = \frac{2.095 \cdot 10^4 \text{ J}}{3.97 \cdot 10^5 \text{ J/kg}} = \underline{\underline{0.053 \text{ kg}}}\end{aligned}$$

Oppgaver: [10.5.3](#), [10.5.4](#).

10.6. Sammendrag.

<i>Symbol:</i>	<i>Norsk betegnelse:</i>	<i>Engelsk betegnelse:</i>
n	Antall mol	Number of moles
α	Termisk lengdeutvidelseskoeffisient	Coeffisient of linear expansion
β	Termisk volumutvidelseskoeffisient	Coeffisient of volume expansion
R	Gasskonstanten	Gas constant
k	Boltzmanns konstant	Boltzmann's constant
H	Varmestrøm	Heat current
Φ	Varmefluks	Heat flux
λ	Varmekonduktivitet	Thermal conductivity
α	Varmeovergangskoeffisient	Heat transfer coeffisient
σ	Stefan-Boltzmanns konstant	Stefan-Boltzmann's constant
C	Varmekapasitet	Heat capacity
c	Spesifikk / molar varmekapasitet	Specific / molar heat capacity
L_s	Spesifikk smeltevarme	Heat of fusion
L_f	Spesifikk fordampingsvarme	Heat of vaporization

Definisjoner og sammenhenger:

Tilstandslikningen for en ideell gass: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T = N \cdot k \cdot T$.

Lineær utvidelse: $\Delta L \approx \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T$.

Volumutvidelse: $\Delta V \approx \beta \cdot V_0 \cdot \Delta T$ der $\beta \approx 3\alpha$.

Varmestrøm: $H = \frac{dQ}{dt}$

$$\text{Varmefluks: } \Phi = \frac{H}{A}.$$

$$\text{Varmeledning gjennom plate: } H = \lambda \cdot A \frac{T_H - T_C}{L}.$$

$$\text{Naturlig konveksjon: } H = \alpha \cdot A \cdot (T_C - T_0) = \alpha \cdot A \cdot \Delta T.$$

$$\text{Varmestråling: } H = A\sigma T^4 \text{ der } \sigma = 5.670400 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4.$$

$$\text{Varmekapasitet: } C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

$$\text{Spesifikk varmekapasitet: } c = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T}.$$

$$\text{Molar varmekapasitet: } c = \frac{\Delta Q}{n \cdot \Delta T}.$$

$$\text{Spesifikk smeltevarme: } L_s = \frac{\Delta Q}{m}.$$

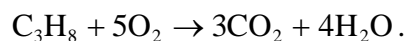
$$\text{Spesifikk fordampingsvarme: } L_f = \frac{\Delta Q}{m}.$$

10.7. Oppgaver med løsningsforslag.

10.7.1 Småoppgaver i teksten.

Oppgave 10.2.1:

Når propan (C_3H_8) forbrenner rent i luft, skjer reaksjonen



Hvor mange kg CO_2 dannes det når 1.00 kg propan forbrenner?

Anta at atommassene til H, C og O er henholdsvis $1u$, $12u$ og $16u$.

Oppgave 10.2.2:

To beholdere A og B er forbundet med en kran. Beholder A har volum 10 liter, mens B har volum 30 liter. A inneholder en ideell gass med temperatur $20^\circ C$ og overtrykk på 3.45 atm , mens B inneholder en ideell gass med temperatur $0^\circ C$ og atmosfæretrykk. Vi åpner krana slik at gassene kan blande seg. Hvor stort er trykket i gassblandingen når temperaturen i gassen er blitt $10^\circ C$? Angi svaret i atmosfærer.

Oppgave 10.2.3:

Propan har kjemisk formel C_3H_8 . Vi har 10 kg propan i en beholder. Hvor stort volum vil denne propanen oppta ved atmosfæretrykk når temperaturen er $20^\circ C$? Anta at propan kan betraktes som en ideell gass.

Oppgave 10.2.4:

Vis at når en ideell gass varmes opp under konstant trykk, er volumøkningen

$$\Delta V = \frac{1}{T_0} \cdot V_0 \cdot \Delta T$$

der V_0 og T_0 er volum og temperatur i start-tilstanden. Den termiske volumutvidelseskoeffisienten er altså $\beta = \frac{1}{T_0}$ når en ideell gass varmes opp under konstant trykk.

Oppgave 10.3.1:

En tynn ring er laget av stål med termisk lengdeutvidelseskoeffisient $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Hvor mange prosent øker arealet som ringen omslutter når temperaturen øker fra 0°C til 100°C ?

Oppgave 10.3.2:

En bensintank som rommer 60 liter er laget av stål med termisk lengdeutvidelseskoeffisient $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Tanken fylles helt med bensin som har termisk volumutvidelseskoeffisient $\beta = 95 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Tanken og bensinen har da temperatur 5°C , men flyttes ut i sola. Hvor mye bensin renner ut når temperaturen til tanken og bensinen er blitt 30°C ?

Oppgave 10.4.1:

En dag står sola 36.9° over horisonten når den står rett i sør. Da er varmefluksen fra sola 850 W/m^2 nær bakken. Hvor stor er varmestrømmen inn et vindu med vindusflate 0.80 m^2 som står på en sørvendt vegg?

Oppgave 10.4.2:

En hyttevegg er 4.50 m lang og 2.40 m høy. Den er bygd av 48 mm tykt massivt tre som har varmekonduktivitet $\lambda = 0.10 \text{ W/m}$. Beregn varmestrømmen gjennom denne veggen en vinterdag når det er 10°C på innsiden av hytteveggen og -5°C på utsiden av hytteveggen.

Oppgave 10.4.3:

En kjellervegg er murt opp av 20 cm tykke murblokker med $\lambda = 0.22 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$. Du vurderer å etterisolere med isolasjonsmatter som har $\lambda = 0.037 \text{ W/(K} \cdot \text{m)}$.

- Hvor mye reduseres varmefluksen ved en temperaturforskjell på 1 K i disse tilfellene:
 - ved å bruke 10 cm tykk isolasjon.
 - ved å øke fra 10 cm til 20 cm tykk isolasjon.
- La tykkelsen av isolasjonsmatta være $x \text{ cm}$. Sett opp varmefluksen som funksjon av x ved en temperaturforskjell på 1 K , og tegn grafen av denne funksjonen.

Oppgave 10.4.4:

Et vindu har areal 0.80 m^2 . Varmestrømmen gjennom vinduet er 64 W .

- Bestem temperaturforskjellene mellom innetemperatur og indre vindusflate, og mellom ytre vindusflate og utetemperatur, når vi bruker $h_{\text{inne}} = 8.0 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$ og $h_{\text{ute}} = 25.0 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$.
- Hvor tykt er vindusglasset når temperaturforskjellen mellom inne- og utetemperatur er 13.6°C , og glassets varmekonduktivitet er $0.8 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$?

Oppgave 10.4.5:

Ta for deg kjellerveggen i oppgave 10.4.3a igjen, men ta hensyn til konveksjon der du benytter at $\alpha_{k,ute} = 25 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ på utsiden og $\alpha_{k,inne} = 8 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ på innsiden.

Oppgave 10.4.6:

Gjenta beregningene i eksempel 10.4.6, men gå ut fra at 30% av den innkommende strålingen reflekteres slik at den ikke inngår i beregningene.

Oppgave 10.5.1:

Du vil varme opp 0.60 liter vann fra 10°C til 80°C med et varme-element som yter 250 Watt. Hvor lang tid tar oppvarmingen når du ser bort fra varmetap til omgivelsene? Vannets spesifikke varmekapasitet er $4190 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, og tettheten til vann er $\rho = 1.00 \cdot 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$.

Oppgave 10.5.2:

Du har 1.20 kg is ved 0°C , og vil smelte denne isen ved å føre vanndamp med temperatur 100°C ned i isen. Hvor mye vanndamp må til når både smeltevannet og det kondenserte vannet får slutt-temperatur på 5°C ? Isens spesifikke smeltevarme er $334 \cdot 10^3 \text{ J}/\text{kg}$, mens vannets spesifikke fordampingsvarme er $2256 \cdot 10^3 \text{ J}/\text{kg}$. Se bort fra varmeutveksling med omgivelsene.

Oppgave 10.5.3:

I ei termosflaske har vi 1.00 kg vann. Vannet og termosflaska har temperatur 30.0°C . Så putter vi 0.150 kg is med temperatur 0.0°C inn i flaska. Når det er oppnådd termisk likevekt, er temperaturen i flaska 16.0°C . Finn varmekapasiteten til termosflaska når vi antar at det ikke er noen varmeutveksling med omgivelsene.

Konstanter:

Spesifikk varmekapasitet for vann: $c = 4190 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Spesifikk smeltevarme for is: $l = 334 \cdot 10^3 \text{ J}/\text{kg}$.

Oppgave 10.5.4:

En vannkoker inneholder et 300 watts varmeelement. Kokeren med varmeelement har varmekapasitet $C = 250 \text{ J}/\text{K}$. Når kokeren har temperaturen 25°C , slipper vi 100 gram finknust is med temperatur -20°C opp i den og slår på varmeelementet. Hvor lang tid tar det før kokeren med innhold har fått temperaturen 5°C ?

Det oppgis at:

Spesifikk varmekapasitet for vann er $4190 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Spesifikk varmekapasitet for is er $2100 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Spesifikk smeltevarme for is er $334 \cdot 10^3 \text{ J}/\text{kg}$.

10.7.2. Blandede oppgaver.

I disse oppgavene kan du få bruk for disse dataene:

Spesifikk varmekapasitet for is: $2100\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Spesifikk smeltevarme for is: $334 \cdot 10^3\text{J}/\text{kg}$.

Spesifikk varmekapasitet for vann: $4190\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Spesifikk fordampingsvarme for vann: $2256 \cdot 10^3\text{J}/\text{kg}$.

Oppgave 10.1:

Vi har 0.600 kg is med temperatur -20°C i en termosflaske som vi antar isolerer fullstendig. Så stikker vi et varmeelement som yter 200 Watt ned i flasken (og i isen). Vi antar at oppvarmingen skjer såpass langsomt at vi hele tiden har termisk likevekt.

- Hvor lang tid tar det før all isen er smeltet og smeltevannet er varmet opp til 30°C ?
- Beskriv tilstanden i termosflaska 5.00 minutter etter at varmeelementet ble stukket ned i isen.

Oppgave 10.2:

Vi har 0.400 kg vann og 0.250 kg is i en isolert beholder. Både vannet og isen har temperaturen 0°C . Så fører vi 0.035 kg vanddamp med temperatur 100°C inn i beholderen. Se bort fra varmeutveksling med omgivelsene.

- Vil all isen smelte til vann?
- Dersom du mener at all isen smelter, skal du finne slutt-temperaturen til vannet. Dersom du mener at all isen ikke smelter, skal du finne hvor mye vann og hvor mye is som er i beholderen i slutt-tilstanden.

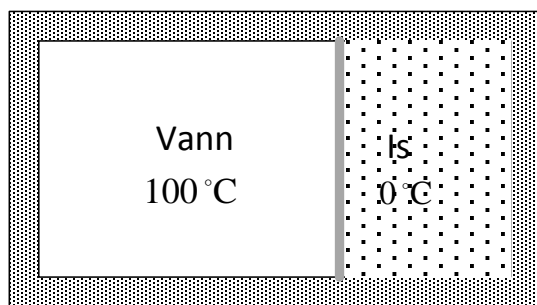
Oppgave 10.3:

Vi legger 0.400 kg is med temperatur -24°C i en termisk isolert beholder som fra før har 0.600 kg vann med temperatur 21°C . Begrunn at når temperaturen har stabilisert seg, vil beholderen inneholde en blanding av vann ved 0°C og is ved 0°C . Hvor mye vann vil det være i beholderen, og hvor mye is vil det være? Se bort fra varmetap til omgivelsene.

Oppgave 10.4:

- Hvor mye varme trengs det for å varme opp 300g is med temperaturen -30°C til vann med temperaturen 80°C ?
- Et termisk isolert system består til å begynne med av 86.0g is med temperaturen -30°C og 1.00kg vann med temperaturen 0°C . Hva er temperaturen til systemet, og hvor mye vann og is er det når systemet er kommet i termisk likevekt?

Oppgave 10.5:



Du vil utføre et eksperiment for å finne varmeledningsevnen (termisk konduktivitet) for en spesiell type glass. En skive av dette glasset med areal 0.010m^2 og tykkelse 4.0 mm danner en skillevegg mellom en beholder som inneholder 0.50 kg finknust is med 0°C og en annen beholder som inneholder vann med 100°C . Se figuren til venstre.

Det varme vannet holdes på 100°C med en varmekolbe (som ikke er tegnet inn på figuren). Da viser det seg at det tar 15 minutter og 30 sekunder å smelte all isen til vann ved 0°C . Bruk dette eksperimentet til å finne glassets varmeledningsevne når du ser bort fra varmeutveksling med omgivelsene, og antar at temperaturene på de to sidene av glassveggen er henholdsvis 100°C og 0°C .

10.7.3. Løsninger på småoppgaver.

Oppgave 10.2.1:

Ett molekyl C_3H_8 har molekylmassen

$$3 \cdot 12u + 8 \cdot 1u = 44u .$$

De tre CO_2 -molekylene som dannes ved forbrenningen, har til sammen molekylmassen

$$3 \cdot (12u + 2 \cdot 16u) = 132u .$$

Når ett kg C_3H_8 forbrenner, dannes det derfor

$$\frac{132u}{44u} \cdot 1.00\text{kg} = \underline{\underline{3.00\text{kg CO}_2}} .$$

Oppgave 10.2.2:

Her er det sikrest å gå veien om antall mol:

$$pV = nRT \Leftrightarrow n = \frac{1}{R} \frac{pV}{T} .$$

Regner konsekvent trykk i atmosfærer og volum i liter. Da trenger jeg ikke å benytte omregningsfaktorer. Jeg setter heller ikke inn for R fordi R etter hvert forkortes bort.

$$\text{Beholder A: } n_A = \frac{1}{R} \frac{(1.00 + 3.45)\text{atm} \cdot 10\text{liter}}{(273 + 20)\text{K}} = \frac{1}{R} \cdot 0.152(\text{atm} \cdot \text{liter}) / \text{K} .$$

$$\text{Beholder B: } n_B = \frac{1}{R} \frac{1.00\text{atm} \cdot 30\text{liter}}{273\text{K}} = \frac{1}{R} \cdot 0.110(\text{atm} \cdot \text{liter}) / \text{K} .$$

Samlet antall mol er da

$$n = n_A + n_B = \frac{1}{R} (0.152 + 0.110)(\text{atm} \cdot \text{liter}) / \text{K} = \frac{1}{R} \cdot 0.262(\text{atm} \cdot \text{liter}) / \text{K} .$$

Det nye volumet blir 40 liter, mens den nye temperaturen er $10^\circ\text{C} = 283\text{K}$. Da er trykket

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{\frac{1}{R} \cdot 0.262(\text{atm} \cdot \text{liter}) / \text{K} \cdot R \cdot 283\text{K}}{40\text{liter}} = \underline{\underline{1.85\text{atm}}} .$$

Oppgave 10.2.3:

Benytter at molmassen til C_3H_8 er $3 \cdot 12 + 8 \cdot 1 = 44$. Antall mol blir da

$$n = \frac{10 \cdot 10^3 \text{ g}}{44 \text{ g/mol}} = 227.$$

Volumet til gassen blir da

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{227 \cdot 8.31 \text{ J/K} \cdot 293 \text{ K}}{1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = \underline{\underline{5.46 \text{ m}^3}}$$

Oppgave 10.2.4:

$$\frac{p_0 V}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \Leftrightarrow V = V_0 \cdot \frac{T}{T_0}.$$

$$\Delta V = V - V_0 = V_0 \cdot \frac{T}{T_0} - V_0 = V_0 \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) = V_0 \frac{T - T_0}{T_0} = \underline{\underline{\frac{1}{T_0} \cdot V_0 \cdot \Delta T}}$$

der $\Delta T = T - T_0$.

Oppgave 10.3.1:

Når ringens radius er R , er lengden av ringen

$$L = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{1}{2\pi} L.$$

Da er arealet

$$\begin{aligned} A &= \pi R^2 = \pi \left(\frac{1}{2\pi} L \right)^2 = \frac{1}{4\pi} L^2 = \frac{1}{4\pi} (L_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T))^2 \\ &= \frac{1}{4\pi} L_0 (1 + 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ K} \cdot 100 \text{ K})^2 = \frac{1}{4\pi} L_0 (1.0012)^2 = \underline{\underline{A_0 \cdot 1.0024}} \end{aligned}$$

Arealet øker altså med 0.24%.

Oppgave 10.3.2:

Når temperaturen er økt fra 5°C til 30°C , er tankens volum økt med

$$\Delta V_{\text{tank}} = 3\alpha \cdot V_0 \cdot \Delta T = 3 \cdot 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot (60 \text{ dm}^3) \cdot 25 \text{ K} = \underline{\underline{0.054 \text{ dm}^3}}.$$

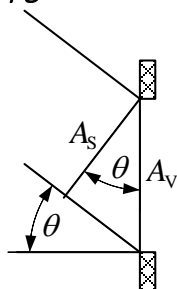
Volumet av bensinen er imidlertid økt med

$$\Delta V_{\text{bensin}} = \beta \cdot V_0 \cdot \Delta T = 95 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot (60 \text{ dm}^3) \cdot 25 \text{ K} = \underline{\underline{1.425 \text{ dm}^3}}.$$

Da er det ikke plass til

$$\Delta V_{\text{bensin}} - \Delta V_{\text{tank}} = (1.425 - 0.054) \text{ dm}^3 = \underline{\underline{1.37 \text{ dm}^3}}.$$

Oppgave 10.4.1:



Når vindusarealet er $A_v = 0.80 \text{ m}^2$, er flata A_s vinkelrett på strålingsretningen

$$A_s = A_v \cos \theta = 0.80 \text{ m}^2 \cdot \cos 36.9^\circ = \underline{\underline{0.64 \text{ m}^2}}.$$

Varmestrømmen blir da

$$Q = (850 \text{ W/m}^2) \cdot (0.64 \text{ m}^2) = \underline{\underline{544 \text{ W}}}.$$

Oppgave 10.4.2:

Varmestrømmen blir

$$H = \lambda \cdot A \frac{T_H - T_C}{L} = 0.10 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m}) \cdot (4.50 \cdot 2.40) \text{ m}^2 \cdot \frac{15 \text{ K}}{0.048 \text{ m}} = \underline{\underline{338 \text{ W}}}.$$

Oppgave 10.4.3:

Beregner de termiske resistansene:

Mur: $R_{\text{mur}} = \frac{L}{\lambda_{\text{Lecca}}} = \frac{0.20 \text{ m}}{0.22 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 0.91 (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}.$

10 cm isolasjon: $R_{\text{iso}} = \frac{L}{\lambda_{\text{iso}}} = \frac{0.10 \text{ m}}{0.037 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 2.70 (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}.$

Uten isolasjon er varmekraften

$$\Phi_0 = \frac{\Delta T}{R_{\text{iso}}} = \frac{1 \text{ K}}{0.91 (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}} = \underline{\underline{1.10 \text{ W}/\text{m}^2}}.$$

a) Med 10 cm isolasjon blir varmekraften

$$\Phi_1 = \frac{\Delta T}{R_{\text{mur}} + R_{\text{iso}}} = \frac{1 \text{ K}}{(0.91 + 2.70) (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}} = \underline{\underline{0.28 \text{ W}/\text{m}^2}}.$$

Med 20 cm isolasjon blir varmekraften

$$\Phi_2 = \frac{\Delta T}{R_{\text{mur}} + 2 \cdot R_{\text{iso}}} = \frac{1 \text{ K}}{(0.91 + 2 \cdot 2.70) (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}} = \underline{\underline{0.16 \text{ W}/\text{m}^2}}.$$

Vi ser at de første 10 cm isolasjon reduserer varmekraften med

$$\underline{\underline{0.82}} (1.10 - 0.28) \text{ W}/\text{m}^2 = 0.82 \text{ W}/\text{m}^2,$$

mens de neste 10 cm isolasjon bare reduserer varmekraften med

$$\underline{\underline{0.82}} (0.28 - 0.16) \text{ W}/\text{m}^2 = 0.12 \text{ W}/\text{m}^2.$$

b) Med x cm isolasjon er den termiske resistansen

$$R = R_{\text{mur}} + R_{\text{iso}} = 0.91 (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W} + \frac{0.01x}{0.037 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = (0.91 + 0.27x) (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}$$

der x er tallverdien av isolasjonstykkelsen målt i cm. Da blir varmekraften

$$\Phi_0 = \frac{\Delta T}{R} = \frac{1 \text{ K}}{(0.91 + 0.27x) (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}} = \underline{\underline{\frac{1}{0.91 + 0.27x} \text{ W}/\text{m}^2}}.$$

Grafen blir slik:

Oppgave 10.4.4:

a) Ved konveksjon er varmestrømmen

$$H = h \cdot A \cdot \Delta T \Leftrightarrow \Delta T = \frac{H}{h \cdot A}.$$

$$\text{Inne: } \Delta T_{\text{inne}} = \frac{H}{h_{\text{inne}} \cdot A} = \frac{64 \text{ W}}{8.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \cdot 0.80 \text{ m}^2} = \underline{\underline{10 \text{ K}}}.$$

$$\text{Ute: } \Delta T_{\text{ute}} = \frac{H}{h_{\text{ute}} \cdot A} = \frac{64 \text{ W}}{25.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \cdot 0.80 \text{ m}^2} = \underline{\underline{3.2 \text{ K}}}.$$

b) Når temperaturforskjellen mellom inne- og utetemperatur er 13.6°C , blir temperaturforskjellen mellom glassets innerside og ytterside

$$\Delta T_{\text{glass}} = (13.6 - 10 - 3.2) \text{ K} = 0.4 \text{ K}.$$

Da er varmestrømmen gjennom glasset

$$H = \lambda \cdot A \frac{\Delta T_{\text{glass}}}{L} \Leftrightarrow L = \frac{\lambda \cdot A \cdot \Delta T_{\text{glass}}}{H} = \frac{0.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}) \cdot 0.80 \text{ m}^2 \cdot 0.4 \text{ K}}{64 \text{ W}} = \underline{\underline{0.004 \text{ m}}}.$$

Oppgave 10.4.5:

Beregner samlet termisk resistans for innvendig og utvendig konveksjon:

$$R_k = \frac{1}{\alpha_{\text{inne}}} + \frac{1}{\alpha_{\text{ute}}} = \frac{1}{8 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})} + \frac{1}{25 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})} = 0.165 (\text{m}^2 \cdot \text{K}) / \text{W}.$$

Fra før vet jeg at:

$$\text{Mur: } R_{\text{mur}} = \frac{L}{\lambda_{\text{mur}}} = \frac{0.20 \text{ m}}{0.22 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 0.91 (\text{m}^2 \cdot \text{K}) / \text{W}.$$

$$10 \text{ cm isolasjon: } R_{\text{iso}} = \frac{L}{\lambda_{\text{iso}}} = \frac{0.10 \text{ m}}{0.037 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 2.70 (\text{m}^2 \cdot \text{K}) / \text{W}.$$

Uten isolasjon er varmefluksen

$$\Phi_0 = \frac{\Delta T}{R_{\text{iso}} + R_k} = \frac{1 \text{ K}}{(0.91 + 0.165) (\text{m}^2 \cdot \text{K}) / \text{W}} = \underline{\underline{0.93 \text{ W}/\text{m}^2}}.$$

Med 10 cm isolasjon blir varmefluksen

$$\Phi_1 = \frac{\Delta T}{R_{\text{mur}} + R_{\text{iso}} + R_k} = \frac{1 \text{ K}}{(0.91 + 2.70 + 0.165) (\text{m}^2 \cdot \text{K}) / \text{W}} = \underline{\underline{0.27 \text{ W}/\text{m}^2}}.$$

Med 20 cm isolasjon blir varmefluksen

$$\Phi_2 = \frac{\Delta T}{R_{\text{mur}} + 2 \cdot R_{\text{iso}} + R_k} = \frac{1 \text{ K}}{(0.91 + 2 \cdot 2.70 + 0.165) (\text{m}^2 \cdot \text{K}) / \text{W}} = \underline{\underline{0.15 \text{ W}/\text{m}^2}}.$$

Vi ser at de første 10 cm isolasjon reduserer varmefluksen med 0.82

$$(0.93 - 0.27) \text{ W}/\text{m}^2 = 0.66 \text{ W}/\text{m}^2,$$

mens de neste 10 cm isolasjon bare reduserer varmefluksen med

$$\underline{\underline{0.82}} (0.27 - 0.15) \text{ W}/\text{m}^2 = 0.12 \text{ W}/\text{m}^2.$$

Oppgave 10.4.6:

Når 30% av den innkommende strålingen reflekteres, er den varmestrømmen som når ned til jordoverflaten gitt ved

$$H_{\text{inn}} = 0.70 \cdot 1366 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \pi R^2 = 956 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \pi R^2.$$

Siden arealet av jordas overflate er

$$A = 4\pi R^2,$$

får vi termisk likevekt når

$$H_{\text{ut}} = H_{\text{inn}} \Leftrightarrow 965 \text{ W/m}^2 \cdot \pi R^2 = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

$$\Leftrightarrow T^4 = \frac{956 \text{ W/m}^2}{4\sigma} = \frac{956 \text{ W/m}^2}{4 \cdot 5.670400 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

$$\Leftrightarrow T = 255 \text{ K} = \underline{\underline{-18^\circ\text{C}}}$$

Oppgave 10.5.1:

Massen til vannet er

$$m = \rho V = (1.00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \cdot (0.60 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) = 0.60 \text{ kg}.$$

For å varme opp vannet, må vi tilføre en varmemengde

$$Q = c_{\text{vann}} \cdot m \cdot \Delta T = (4190 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) \cdot (0.60 \text{ kg}) \cdot (80 - 10) \text{ K} = \underline{\underline{1.76 \cdot 10^5 \text{ J}}}.$$

Effekten er

$$P = \frac{Q}{t} \Leftrightarrow t = \frac{Q}{P} = \frac{1.76 \cdot 10^5 \text{ J}}{250 \text{ J/s}} = \underline{\underline{704 \text{ s}}}.$$

Oppgave 10.5.2:

For å smelte isen og deretter varme den opp til 5°C , trengs en varmemengde

$$Q = l_{\text{is}} \cdot m_{\text{is}} + c_{\text{vann}} \cdot m_{\text{is}} \cdot \Delta T = 1.20 \text{ kg} \cdot (334 \cdot 10^3 \text{ J/kg} + 4190 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}) \cdot 5 \text{ K} \\ = \underline{\underline{4.26 \cdot 10^5 \text{ J}}}$$

Denne varmemengden må avgis når dampen kondenserer, og det kondenserte vannet kjøles ned fra 100°C til 5°C :

$$Q = l_{\text{damp}} \cdot m_{\text{damps}} + c_{\text{vann}} \cdot m_{\text{damp}} \cdot \Delta T = m_{\text{damp}} \cdot (2256 \cdot 10^3 \text{ J/kg} + 4190 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}) \cdot 95 \text{ K} \\ 4.26 \cdot 10^5 \text{ J} = m_{\text{damp}} \cdot 2.65 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \Leftrightarrow m_{\text{damp}} = \frac{4.26 \cdot 10^5 \text{ J}}{2.65 \cdot 10^6 \text{ J/kg}} = \underline{\underline{0.16 \text{ kg}}}.$$

Oppgave 10.5.3:

Kaller vannets start temperatur t_1 og felles-temperaturen ved termisk likevekt t_f .

Avgitt varme = mottatt varme

$$m_{\text{vann}} c_{\text{vann}} (t_1 - t_f) + C(t_1 - t_f) = m_{\text{is}} l_{\text{is}} + m_{\text{is}} c_{\text{vann}} (t_f - t_{\text{is}})$$

$$1.00 \cdot 4190(30 - 16) \text{ J} + C(30 - 16) \text{ K} = 0.150 \cdot 334 \cdot 10^3 \text{ J} + 0.150 \cdot 4190(16 - 0) \text{ J}$$

$$58660 \text{ J} + 14 \text{ K} \cdot C = 60156 \text{ J}$$

$$C = \frac{60156 \text{ J} - 58660 \text{ J}}{14 \text{ K}} = \underline{\underline{107 \text{ J/K}}}$$

Oppgave 10.5.4:

Setter opp følgende energiregnskap, der Q er den varmen som varmeelementet avgir:

$$\begin{aligned} Q &= 300 \text{ W} \cdot t = \underbrace{c_{\text{is}} \cdot m \cdot (0^\circ - (-20^\circ))}_{\text{isen varmes opp til } 0^\circ} + \underbrace{l_{\text{is}} \cdot m}_{\text{isen smelter}} + \underbrace{c_{\text{vann}} \cdot m \cdot (5^\circ - 0^\circ)}_{\text{smeltevannet varmes opp til } 5^\circ} + \underbrace{C(5^\circ - 25^\circ)}_{\text{vannkokeren avkjøles}} \\ &= (2100 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \cdot 20 \text{ K} + 334 \cdot 10^3 \text{ J}/\text{kg} + 4190 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \cdot 5 \text{ K}) \cdot 0.100 \text{ kg} + 250 \text{ J}/\text{K}(-20 \text{ K}) \\ &= (42000 \text{ J}/\text{kg} + 334 \cdot 10^3 \text{ J}/\text{kg} + 20950 \text{ J}/\text{kg}) \cdot 0.100 \text{ kg} - 5000 \text{ J} \\ &= 39695 \text{ J} - 5000 \text{ J} = \underline{\underline{34695 \text{ J}}} \end{aligned}$$

Da blir

$$t = \frac{Q}{W} = \frac{34695 \text{ J}}{300 \text{ J/s}} \approx \underline{\underline{116 \text{ s}}}.$$

10.7.4. Svar på blandede oppgaver.

Oppgave 10.1:

25 min 05 s., 0.10 kg vann og 0.50 kg is.

Oppgave 10.2:

All isen smelter, $T = 3.5^\circ \text{C}$.

Oppgave 10.3:

0.30 kg is, 0.70 kg vann.

Oppgave 10.4:

$Q = 219 \cdot 10^3 \text{ J}$, 0.101 kg is, 0.985 kg vann, $T = 0^\circ \text{C}$.

Oppgave 10.5:

$k = 0.72 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m})$.