1. Innledning.

Vi starter med noen generelle betraktninger. Mye av dette vil nok være kjent fra før, men det skader sikkert ikke å repetere det. Dessuten får du bruk for det meste i også andre fag enn fysikk.

1.1. Hva er fysikk?
Vi ser litt på noen av de temaene som inngår i faget *fysikk*, og gir noen begrunnelser for hvorfor det er nyttig å studere dette faget.

1.2. Standardiserte måleenheter.
Fysikk er en eksperimentell vitenskap. Derfor er det nødvendig å kunne måle ting, og da trenger vi standardiserte måleenheter. Det er faktisk først de siste årene at vi har fått et slikt sett med måleenheter. Fremdeles brukes mange "gammeldagse" måleenheter som bare bringer inn forvirring. Noen standardiserte måleenheter blir introdusert her, mens andre tas etter hvert.

1.3. Konsistente likninger.
Hvorfor må vi ta hensyn til benevninger når vi utfører beregninger? Noe av svaret gis her.

1.4. Måleusikkerhet, antall sifre.
Hvor mange sifre skal vi ta med når vi beregner en størrelse og angir et svar? Vi gir et par enkle regler her.

De fire punktene ovenfor bør stort sett være kjent stoff fra forkurs eller videregående skole. Men det kan være nyttig å titte litt på de to punktene nedenfor dersom du vil lære mer om beregning av usikkerhet.

1.5. Mer om usikkerhet.
Noen mer håndfaste teknikker for å anslå usikkerheten i en beregning.

1.6. Relativ usikkerhet.
Her ser vi på forholdet mellom usikkerheten i en størrelse, og størrelsen selv. Vi introduserer også en grei matematisk metode for å anslå relativ usikkerhet.

1.1. Hva er fysikk?

Hvis vi vil være pretensiøse, kan vi si at ***fysikk er samlingen av all den kunnskap vi har om de grunnleggende lover for vårt univers***. Andre naturvitenskaper og (ikke minst) tekniske fag bygger i stor grad på grunnleggende kunnskaper innen fysikk.

Et av de mange fascinerende aspektene ved fysikk er at de samme grunnleggende lovene kan anvendes med stor suksess innen svært ulike fagfelt. Et par eksempler:

- Newtons kraftlover har i århundrer vært benyttet til å beregne banene til planeter og andre himmellegemer. De samme lovene ble lagt til grunn da man begynte å forstå hvordan atomene er bygd opp.
- Meteorologer som skal forutsi været i morgen, og klimaforskere som skal forutsi klimaet om 30 år, benytter de samme lovene fra varmelæra som maskiningeniørene benytter.
- De samme lovene for elektrisitet og magnetisme benyttes både av nordlysforskere, elektroingeniører som skal bygge kraftverk, og konstruktører av mikroprosessorer.

Men fysikk benyttes ikke bare til å *beskrive* naturen. Den teknologiske utvikling som vi har vært vitne til det siste hundreåret, ville vært umulig uten kunnskaper innen fysikk. Biler, båter, tog og fly, elektrisk energi, radio og TV, og ikke minst datamaskiner, alt dette er basert på fysiske lover. Når du skal forstå virkemåten til slikt teknologisk utstyr, må også du kjenne disse fysiske lovene.

Fysikken har utviklet seg gradvis gjennom flere århundrer. Etter hvert er fagområdet blitt basert på to grunnpilarer:

1. Fysikk er en ***eksperimentell vitenskap***. Alle de lovene som gjelder innen fysikk, er basert på og kontrollert gjennom godt planlagte eksperimenter og målinger.

2. Fysikk er basert på ***matematiske modeller***. Dette innebærer at fysiske lover formuleres som matematiske likninger. Vær klar over at de lovene som formuleres, gjelder eksakt kun når visse forutsetninger er oppfylt.

Det er vanlig at eksperimenter viser at de matematiske modellene ikke stemmer eksakt. Dette betyr ikke at de fysiske lovene er ”gale”. Vanligvis må vi benytte forenklede modeller av en komplisert virkelighet. Ved å studere avvikene mellom modeller og eksperimenter kan vi forbedre våre modeller, og på den måten få bedre kjennskap til naturen.

Vi skal stort sett se på slike forenklede modeller, og konsentrere oss om de grunnleggende lovene. Våre modeller blir derfor såpass ”strippet” at de sjelden kan gjengi naturen særlig nøyaktig. Men de er likevel uhyre viktige, fordi de danner grunnlaget for de studiene som du etter hvert skal foreta innen dine spesialemner. Der vil du sette opp og studere mer realistiske modeller. Disse modellene er mer kompliserte bl.a. ved at de tar hensyn til flere effekter samtidig. Men hele tiden bygger du på de grunnleggende lovene som du skal lære i dette kurset.

1.2. Standardiserte måleenheter.

Når du utfører en måling og skriver ned resultatet, noterer du to ting: Et *måltall* og en *måleenhet*. Hvis du for eksempel veier en sekk poteter, og skriver ned ”32.7 kg”, så er ”32.7” måltallet mens ”kg” er måleenheten.

I fysikk skriver vi ofte $m = 32.7\,\text{kg}$. Da er *m* en **fysisk størrelse**, som består av et måltall og en måleenhet. I trykt skrift er det vanlig å skrive fysiske størrelser med *kursiv*, mens måleenheter skrives med vanlig skrift. På den måten kan vi skille mellom den fysiske størrelsen *m* og måleenheten for lengde, meter, som har symbol m.

Gjennom tidene har det vært lagt ned mye arbeid for å finne fornuftige måleenheter. Men ulike fagfelt har benyttet forskjellige måleenheter for samme fysiske størrelse. Dette har medført mye forvirring når folk fra ulike fagfelt skal samarbeide. Selv i dag benyttes en forvirrende mengde enheter for helt grunnleggende størrelser som for eksempel trykk, energi og effekt.

I fysikk skal vi benytte et sett standardiserte enheter, selv om disse i noen tilfeller avviker fra det som er vanlig innen et fagmiljø. Disse standardiserte enhetene kalles ***SI-systemet*** (***S***ystème ***I***nternationale). Systemet bygger på 7 veldefinerte grunnenheter:

Størrelse	Enhet	Symbol
Lengde	Meter	m
Masse	Kilogram	kg
Tid	Sekund	s
Elektrisk strøm	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmengde	Mol	mol
Lysintensitet	Candela	cd

Alle andre enheter avledes av disse. Noen slike avledede enheter har fått egen navn. For eksempel måles *kraft* i $\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$. Men denne enheten kalles gjerne *Newton*, og har symbolet N. Vi sier også at *kraft* her *benevningen* $\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$ eller N.

Du finner mer på denne nettsiden:
http://physics.nist.gov/cuu/

Sammenhengen mellom ulike måleenheter, og omregning mellom disse, kan medføre problemer og forvirring. Heldigvis fins det flere nettsider som kan hjelpe. Her er en slik nettside:
http://www.digitaldutch.com/unitconverter/

Måltallene bør helst oppgis på ***standardform***. Dette innebærer at et tall *T* oppgis på formen

$$T = k \cdot 10^n$$

der $k \in [1, 10\rangle$ og $n \in \mathbb{Z}$. Et par eksempler:

0.00023 oppgis som $2.3 \cdot 10^{-4}$.
497 000 oppgis som $4.97 \cdot 10^5$.

Prefiks	Symbol	Tierpotens
Pico	p	10^{-12}
Nano	n	10^{-9}
Mikro	μ	10^{-6}
Milli	m	10^{-3}
Centi	c	10^{-2}
Desi	d	10^{-1}
Hekto	h	10^{2}
Kilo	k	10^{3}
Mega	M	10^{6}
Giga	G	10^{9}
Tera	T	10^{12}

Et vanlig problem med disse standardiserte enhetene er at måltallene kan bli svært små eller svært store når vi benytter disse enhetene. Istedenfor å skrive tallene på standardformen, er det blitt vanlig å benytte standardiserte ***prefikser***. Dette er bokstav-symboler som betyr at måltallet skal multipliseres med en fast faktor. For eksempel betyr *k*-en i ”2.7 **k**m” at måltallet 2.7 skal multiplisere med 1000 for å få lengden i meter.

SI-systemet har definert et sett standardiserte prefikser. De vanligste er listet opp i tabellen til venstre.

Vær for all del oppmerksom på bruken av stor og liten bokstav. Det er forskjell på **m** og **M**! Dersom du kommer over en avisartikkel der det sies at et nytt kraftverk kan produsere noen hundre mW, kan du trygt gå ut fra at journalisten ikke vet forskjellen på mW (milliwatt) og MW (megawatt).

Det er lett å bli lurt når vi regner med slike prefikser. Et lite eksempel: En kubikkcentimeter skrives ofte som cm^3. Det burde vært skrevet som $(\mathrm{cm})^3$, fordi en kubikkcentimeter er

$$(1\mathrm{cm})^3 = \left(1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^3 = \left(1\cdot 10^{-2}\right)^3 \mathrm{m}^3 = 1\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3 .$$

1.3. Konsistente likninger.

Det er en vanlig slendrian å slurve med måleenheter. Hvorfor skal vi pirke med å skrive ned disse enhetene når vi i utgangspunktet vet hvilke enheter vi bruker? Et (av mange) svar er at vi kan kontrollere de likningene vi bruker. Enhver likning må nemlig være ***konsistent*** med hensyn på måleenheter. Dette innebærer at når du setter opp måleenhetene for alle de størrelsene som inngår, og eventuelt forkorter med vanlige forkortingsregler, skal ***alle leddene ha samme enhet***.

Et lite eksempel: Fra videregående skole eller forkurs husker du sikkert at sammenhengen mellom posisjon *x*, startfart v_0, tid *t* og akselerasjon *a* er

$$x = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 .$$

Vi sjekker konsistensen:

x måles i *meter* (m)
t måles i *sekund* (s)
v_0 måles i m/s
a måles i $\mathrm{m/s^2}$.

Dersom vi kun ser på måleenhetene, får vi

$$\mathrm{m} = (\mathrm{m/s})\cdot \mathrm{s} + \left(\mathrm{m/s^2}\right)\cdot \mathrm{s}^2$$

fordi faktoren $\tfrac{1}{2}$ er dimensjonsløs. Vi ser at alle leddene får benevningen *meter*.

Vi kan bruke de samme prinsippene ved omregning mellom ulike måleenheter:

$$54\,\text{km/h} = 54 \cdot \frac{1000\,\text{m}}{60 \cdot 60\,\text{s}} = \frac{54\,000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 15\,\text{m/s}\,.$$

Noen ganger vil vi presisere hvilken måleenhet som er brukt på en fysisk størrelse. Da setter vi enheten i skarpe klammer. Dette gjøres ofte i grafer, der en akse kan være merket slik:

$v[\,\text{m/s}\,]$.

Dette betyr at farten *v* er målt i meter pr sekund.

1.4. Måleusikkerhet, antall sifre.

Det er umulig å måle en fysisk størrelse helt nøyaktig. Enhver måling er beheftet med en viss *måleusikkerhet*. Jeg liker ikke betegnelsen måle*feil*, fordi dette kan oppfattes som om noen har tabbet seg ut under målingen. Det ideelle er at vi eksplisitt oppgir både måleverdi og usikkerhet, for eksempel på formen $3.91 \pm 0.07\,\text{m}$. Dette innebærer at måleverdien ligger et sted mellom 3.84 m og 3.98 m, med midtpunktet 3.91 m som en ”beste verdi”.

I praksis er det ikke lett å fastslå nøyaktig hvor stor måleusikkerheten er (også usikkerheten er beheftet med usikkerhet). Vi bruker derfor gjerne en enklere (og mindre nøyaktig) metode, ved at vi lar antall ***signifikante sifre*** angi hvor nøyaktig målingen var. Hvis vi for eksempel skriver at lengden er 3.91 m, betyr det at lengden ligger et sted mellom 3.905 m og 3.915 m.

Noen ganger er siste siffer mer usikkert. Da kan vi for eksempel skrive at lengden er $(3.91 \pm 0.03)\,\text{m}$. Det betyr at lengden ligger mellom 3.88 m og 3.94 m. Generelt kan vi oppgi en størrelse på formen $x = x_0 \pm \Delta x$, der x_0 er den mest sannsynlige verdien mens Δx angir usikkerheten. Det er vanlig å benytte bare ett siffer i Δx.

Når store eller små tall oppgis på standardform, kan vi angi usikkerheten samtidig. Når vi skriver et tall som $3.900 \cdot 10^5$, er tallet gitt med 4 signifikante sifre. Dette er noe helt annet enn $3.9 \cdot 10^5$, som kun har 2 signifikante sifre. Merk at begge disse tallene skrives 390 000 når de skrives ut på ”vanlig” måte. Denne siste skrivemåten gir ingen indikasjon om nøyaktigheten.

Når vi foretar beregninger på grunnlag av målinger, bør også resultatene av beregningene avspeile hvor nøyaktige målingene var. Det fins detaljerte regneregler for beregning av slik usikkerhet. Vi skal imidlertid benytte oss av enklere regler:

Multiplikasjon og divisjon: Svar skal gis med like mange gjeldende sifre som det tallet som har *færrest* gjeldende sifre. Det samme gjelder for ***kvadrering*** og ***kvadratrøtter***.

Eksempel: $10.4 \cdot 31.46 = 327$, fordi tallet 10.4 er gitt med bare 3 gjeldende sifre.

Eksempel: $\sqrt{1.4} = 1.2$ (ikke 1.18 eller 1.1832 eller noe slikt) fordi 1.4 bare har 2 gjeldende sifre.

Addisjon og subtraksjon: Nøyaktigheten i svaret bestemmes av det tallet som er *minst nøyaktig* (d.v.s. har færrest sifre etter desimaltegnet).

Eksempel: $12.4 + 0.071 = 12.5$, ikke 12.47 eller 12.471. Her er det tallet 12.4 som er minst *nøyaktig*, selv om tallet 0.071 har færrest gjeldende sifre.

Vær spesielt obs. på den situasjonen som kan oppstå når to tall som er nesten like store skal trekkes fra hverandre, som i dette eksemplet:

$$13572 - 13531 = 41.$$

Her må svaret gis med 2 gjeldende sifre, selv om begge de tallene som benyttes i beregningene har 5 gjeldende sifre. Se også hva som kan skje dersom du avrunder til 3 gjeldende sifre før du trekker fra. Da får du:

$$13600 - 13500 = 100,$$

som er over dobbelt så stort som det riktige svaret.

I mellomregninger er det vanlig å bruke ett siffer mer enn i sluttsvar.

Den viktigste regelen er imidlertid denne:

***Bruk sunn fornuft slik at antall gjeldene sifre avspeiler den reelle nøyaktigheten*.**

*1.5. Mer om usikkerhet.

Dersom du kjenner usikkerheten i alle størrelser som inngår i en beregning, kan du anslå usikkerheten i beregningen ved å regne ut den største og den minste mulige verdien slik eksemplene nedenfor viser.

Eksempel 1.5.1: Radien i en sirkel er $(12.3 \pm 0.1)\,\text{cm}$. Beregn sirkelens areal, og angi usikkerheten.

Løsning: Den mest sannsynlige verdien av arealet er

$$A_0 = \pi R^2 = \pi \cdot (12.3\,\text{cm})^2 = \underline{475.3\,\text{cm}^2}.$$

Størst mulig verdi av arealet er

$$A_{\text{max}} = \pi R_{\text{max}}{}^2 = \pi \cdot (12.4\,\text{cm})^2 = \underline{483.1\,\text{cm}^2}.$$

Minst mulig verdi av arealet er

$$A_{\text{min}} = \pi R_{\text{min}}{}^2 = \pi \cdot (12.2\,\text{cm})^2 = \underline{467.6\,\text{cm}^2}.$$

Da oppgir vi arealet som

$$A = \underline{\underline{(475 \pm 8)\,\text{cm}^2}}.$$

Eksempel 1.5.2: Når en bil bruker en tid t på å kjøre en strekning x, er bilens gjennomsnitts-fart gitt ved

$$v = \frac{x}{t}.$$

Du skritter opp en strekning $x = (50 \pm 5)\,\text{m}$, og måler tiden ved hjelp av stoppeklokka på mobiltelefonen. Du får $t = (3.6 \pm 0.2)\,\text{s}$. Finn bilens gjennomsnittsfart, og angi usikkerheten.

Løsning: Den mest sannsynlige farten er

$$v_0 = \frac{x}{t} = \frac{50\,\text{m}}{3.6\,\text{s}} = \underline{13.9\,\text{m/s}}\,.$$

Den største verdien får du når telleren er størst, samtidig som nevneren er minst:

$$v_{\max} = \frac{x_{\max}}{t_{\min}} = \frac{55\,\text{m}}{3.4\,\text{s}} = \underline{16.2\,\text{m/s}}\,.$$

Den største verdien får du når telleren er størst, samtidig som nevneren er minst:

$$v_{\min} = \frac{x_{\min}}{t_{\max}} = \frac{45\,\text{m}}{3.8\,\text{s}} = \underline{11.8\,\text{m/s}}\,.$$

Da oppgir vi farten som

$$v = \underline{\underline{(14 \pm 2)\,\text{m/s}}}\,.$$

Vanligvis nøyer vi oss med å beregne mest sannsynlige verdi og enten største eller minste verdi, og benytte differansen mellom disse som usikkerhet.

Oppgaver: 1.5.1, 1.5.2, 1.5.3, 1.5.4.

*1.6. Relative usikkerheter.

En måleusikkerhet gir ikke mye informasjon i seg selv. Usikkerheten må ses i sammenheng med den mest sannsynlige måleverdien. Vi definerer derfor:

Dersom x oppgis på formen $x_0 \pm \Delta x$, er den ***relative usikkerheten*** i x definert som $\dfrac{\Delta x}{x_0}$.

Denne definisjonen er spesielt nyttig når vi benytter regelen nedenfor:

Dersom $y = k \cdot x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$, der k er konstant mens $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ har usikkerhetene $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \dots,\ \Delta x_n$, så er

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \left| p_1 \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| p_2 \cdot \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| + \cdots + \left| p_n \cdot \frac{\Delta x_n}{x_n} \right|.$$

Regelen er enkel å vise dersom du kjenner tilvekstformelen for en funksjon av flere variable. Vi nøyer oss med en funksjon av to variable:

$$y = k \cdot x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2}\,.$$

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 = \left(k \cdot p_1 \cdot x_1^{p_1 - 1} \cdot x_2^{p_2} \right) \cdot \Delta x_1 + \left(k \cdot x_1^{p_1} \cdot p_2 \cdot x_2^{p_2 - 1} \right) \cdot \Delta x_2\,.$$

Da blir

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \frac{\left(k \cdot p_1 \cdot x_1^{p_1-1} \cdot x_2^{p_2}\right) \cdot \Delta x_1 + \left(k \cdot x_1^{p_1} \cdot p_2 \cdot x_2^{p_2-1}\right) \cdot \Delta x_2}{k \cdot x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2}}$$

$$= \underline{p_1 \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1} + p_2 \cdot \frac{\Delta x_2}{x_2}}$$

Med flere variable føyer vi bare til flere ledd. Absoluttverditegnene skyldes at vi ikke vet fortegnet til usikkerhetene, og må derfor sørge for at alle leddene er positive.

Eksempel 1.6.1: Beregn relativ usikkerhet i:
a) Arealet i Eksempel 1.5.1.
b) Farten i Eksempel 1.5.2.

Løsning:
a) Arealet er gitt ved $A = \pi R^2$ der $R = (12.3 \pm 0.1)\,\text{cm}$. Da blir

$$\frac{\Delta A}{A_0} = 2 \cdot \frac{\Delta R}{R_0} = 2 \cdot \frac{0.1}{12.3} = \underline{\underline{0.016}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A = 0.016 \cdot A_0 = 0.016 \cdot \left(475.3\,\text{cm}^2\right) = \underline{7.6\,\text{cm}^2}\,.$$

b) Farten er gitt ved $v = \dfrac{x}{t} = x \cdot t^{-1}$ der $x = (50 \pm 5)\,\text{m}$ og $t = (3.6 \pm 0.2)\,\text{s}$. Da er

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| + \left|(-1) \cdot \frac{\Delta t}{t_0}\right| = \frac{5}{50} + \frac{0.2}{3.6} = \underline{\underline{0.16}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta v = 0.16 \cdot v_0 = 0.16 \cdot 13.9\,\text{m/s} = \underline{2.2\,\text{m/s}}$$

Oppgave 1.6.1.

1.7. Oppgaver med løsninger.

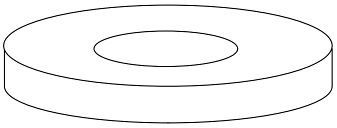
1.7.1. Oppgaver.

Oppgave 1.5.1:
En kasse har kvadratisk bunn med sidekant $31.4\,\text{cm}$ og høyde $26.4\,\text{cm}$. Begge målingene har usikkerhet $0.05\,\text{cm}$. Beregn kassens volum, og angi usikkerheten.

Oppgave 1.5.2:
En kakebunn har diameter $d = (28.6 \pm 0.2)\,\text{cm}$ og høyde $h = (2.2 \pm 0.2)\,\text{cm}$.

a) Bestem volumet av kakebunnen, og oppgi svaret i m^3 med korrekt usikkerhet.
b) Beregn forholdet mellom radius og høyde, og oppgi svaret med korrekt usikkerhet.

Oppgave 1.5.3:



En pakning av gummi har ytre diameter $(8.1 \pm 0.3)\,\mathrm{cm}$, et hull med diameter $(3.4 \pm 0.2)\,\mathrm{cm}$ og tykkelse $(6 \pm 1)\,\mathrm{mm}$. De store usikkerhetene skyldes at gummipakningen er fleksibel, og derfor vanskelig å måle nøyaktig. I en tabell finner du at tettheten til gummi ligger i området $(0.92 - 0.96) \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Hvor mange gram er denne pakningen på? Svaret skal gis med usikkerhet. Tetthet er definert som

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m = \rho \cdot V\,.$$

Oppgave 1.5.4:
I en rettvinklet trekant er hypotenusen $(21.6 \pm 0.1)\,\mathrm{cm}$ lang, mens en av katetene er $(18.3 \pm 0.1)\,\mathrm{cm}$ lang. Hvor lang er den andre kateten? Svaret skal gis med usikkerhet.

Oppgave 1.6.1:
Beregn relativ usikkerhet i volumet av kassen i Oppgave 1.5.1.

1.7.2. Løsninger.

Oppgave 1.5.1:
Bunnens sidekant har lengde *l*, mens høyden er *h*.
Den mest sannsynlige verdien av volumet er da

$$V_0 = l^2 \cdot h = (0.314\,\mathrm{m})^2 \cdot (0.264\,\mathrm{m}) = \underline{0.0260\,\mathrm{m}^3}\,.$$

Største mulige verdi er

$$V_{\max} = {l_{\max}}^2 \cdot h_{\max} = (0.3145\,\mathrm{m})^2 \cdot (0.2645\,\mathrm{m}) = \underline{0.0262\,\mathrm{m}^3}\,,$$

mens minste mulige verdi er

$$V_{\min} = {l_{\min}}^2 \cdot h_{\min} = (0.3135\,\mathrm{m})^2 \cdot (0.2635\,\mathrm{m}) = \underline{0.0259\,\mathrm{m}^3}\,.$$

Volumet angis da som

$$V = \underline{\underline{(0.0260 \pm 0.0002)\,\mathrm{m}^3}}\,.$$

Oppgave 1.5.2:
En kakebunn har diameter $d = \left(28.6 \pm 0.2\right)\mathrm{cm}$ og høyde $h = \left(2.2 \pm 0.2\right)\mathrm{cm}$.

a) Dersom vi benytter $r_0 = \frac{1}{2} d_0 = \frac{1}{2} \cdot 0.286\,\mathrm{m} = 0.143\,\mathrm{m}$ og $h_0 = 0.022\,\mathrm{m}$, blir volumet

$$V_0 = \pi {r_0}^2 h_0 = \pi \cdot \left(0.143\,\mathrm{m}\right)^2 \cdot \left(0.022\,\mathrm{m}\right) \approx \underline{\underline{0.00141\,\mathrm{m}^3}}\,.$$

Dersom vi benytter $r_{\max} = \frac{1}{2} d_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 0.288\,\mathrm{m} = 0.144\,\mathrm{m}$ og $h_{\max} = 0.024\,\mathrm{m}$, blir volumet

$$V_{\max} = \pi {r_{\max}}^2 h_{\max} = \pi \cdot \left(0.144\,\mathrm{m}\right)^2 \cdot \left(0.024\,\mathrm{m}\right) \approx 0.00156\,\mathrm{m}^3\,.$$

Dersom vi benytter $r_{\min} = \frac{1}{2} d_{\min} = \frac{1}{2} \cdot 0.284\,\mathrm{m} = 0.142\,\mathrm{m}$ og $h_{\min} = 0.020\,\mathrm{m}$, blir volumet

$$V_{\min} = \pi {r_{\min}}^2 h_{\min} = \pi \cdot \left(0.142\,\mathrm{m}\right)^2 \cdot \left(0.020\,\mathrm{m}\right) \approx 0.00127\,\mathrm{m}^3\,.$$

Differensen mellom de to siste svarene må være $2\Delta V$, slik at

$$2\Delta V = 0.00156\,\text{m}^3 - 0.00127\,\text{m}^3 = 0.00029\,\text{m}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta V = \underline{0.00015\,\text{m}^3}\,.$$

Volumet blir derfor

$$V = \underline{\underline{\left(0.00141 \pm 0.00015\right)\text{m}^3}} = \underline{\underline{\left(1.41 \pm 0.15\right)\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}}\,.$$

b) Forholdet mellom radius og høyde blir

$$x_0 = \frac{r_0}{h_0} = \frac{\frac{1}{2}d_0}{h_0} = \frac{0.143\,\text{m}}{0.022\,\text{m}} = \underline{\underline{6.50}}\,.$$

Vi får størst verdi av *x* når *r* er størst mulig samtidig som *h* er minst mulig. Da blir

$$x_{\max} = \frac{r_{\max}}{h_{\min}} = \frac{0.144}{0.020} = 7.20\,.$$

Vi får minst verdi av *x* når *r* er minst mulig samtidig som *h* er størst mulig. Da blir

$$x_{\min} = \frac{r_{\min}}{h_{\max}} = \frac{0.142}{0.024} = 5.92\,.$$

Differensen mellom de to siste svarene må være $2\Delta V$, slik at

$$2\Delta x = 7.20 - 5.92 = 1.28 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x \approx \underline{\underline{0.7}}\,.$$

Her må vi forhøye oppover for å få med oss avstanden fra 6.50 til 7.20. Da blir

$$x = \underline{\underline{6.5 \pm 0.7}}\,.$$

Oppgave 1.5.3:

Pakningens ytre diameter er $R = (4.05 \pm 0.15)\,\text{cm}$, mens hullets radius er $r = (1.70 \pm 0.10)\,\text{cm}$. Mens sannsynlige verdi av massen er da

$$\begin{aligned} m_0 &= \rho_0 \cdot \left(\pi R_0^{\,2} - \pi r_0^{\,2}\right) \cdot h_0 \\ &= \left(0.94 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3\right) \cdot \pi \cdot \left(\left(4.05 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\right)^2 - \left(1.70 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\right)^2\right) \cdot 0.006\,\text{m} \\ &= \underline{2.39 \cdot 10^{-2}\,\text{kg}} \end{aligned}$$

Vi får størst mulig verdi når ytre diameter er størst mulig mens hullet er minst mulig, samtidig som tetthet og høyde har sine største verdier. Da blir

$$\begin{aligned} m_{\max} &= \rho_{\max} \cdot \left(\pi R_{\max}^{\,2} - \pi r_{\min}^{\,2}\right) \cdot h_{\max} \\ &= \left(0.96 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3\right) \cdot \pi \cdot \left(\left(4.20 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\right)^2 - \left(1.60 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\right)^2\right) \cdot 0.007\,\text{m} \\ &= \underline{3.18 \cdot 10^{-2}\,\text{kg}} \end{aligned}$$

Vi får minst mulig verdi når ytre diameter er minst mulig mens hullet er størst mulig, samtidig som tetthet og høyde har sine minste verdier. Da blir

$$\begin{aligned} m_{\min} &= \rho_{\min} \cdot \left(\pi R_{\min}^{\,2} - \pi r_{\max}^{\,2}\right) \cdot h_{\min} \\ &= \left(0.92 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3\right) \cdot \pi \cdot \left(\left(3.90 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\right)^2 - \left(1.80 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\right)^2\right) \cdot 0.005\,\text{m} \\ &= \underline{1.73 \cdot 10^{-2}\,\text{kg}} \end{aligned}$$

Massen blir altså $m = \underline{\underline{(2.4 \pm 0.8) \cdot 10^{-2}\,\text{kg}}} = \underline{\underline{(240 \pm 80)\,\text{gram}}}$.

Oppgave 1.5.4:

Kaller hypotenusen *c*, mens den kjente og den ukjente siden kalles *a* og *x*. Da er

$$c^2 = a^2 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{c^2 - a^2}\ .$$

Mest sannsynlige verdi blir

$$x_0 = \sqrt{{c_0}^2 - {a_0}^2} = \sqrt{(21.6\,\text{cm})^2 - (18.3\,\text{cm})^2} = \underline{11.5\,\text{cm}}\ .$$

Vi får størst mulig verdi når *c* er størst samtidig som *a* er minst:

$$x_{\max} = \sqrt{{c_{\max}}^2 - {a_{\min}}^2} = \sqrt{(21.7\,\text{cm})^2 - (18.2\,\text{cm})^2} = \underline{11.8\,\text{cm}}\ .$$

Vi får minst mulig verdi når *c* er minst samtidig som *a* er størst:

$$x_{\min} = \sqrt{{c_{\min}}^2 - {a_{\max}}^2} = \sqrt{(21.5\,\text{cm})^2 - (18.4\,\text{cm})^2} = \underline{11.1\,\text{cm}}\ .$$

Lengden av den siste kateten blir da

$$x = \underline{\underline{(11.5 \pm 0.4)\,\text{cm}}}\ .$$

Oppgave 1.6.1:

Volumet er gitt ved $V = l^2 \cdot h$ der $l = (31.4 \pm 0.05)\,\text{cm}$ og $h = (26.4 \pm 0.05)\,\text{cm}$. Da er

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 2 \cdot \frac{\Delta l}{l_0} + \frac{\Delta h}{h_0} = 2 \cdot \frac{0.05}{31.4} + \frac{0.05}{26.4} = \underline{\underline{0.005}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta V = 0.005 \cdot V_0 = 0.005 \cdot 0.0260\,\text{m}^3 = \underline{0.00013\,\text{m}^3}$$